

Seriler için bazı teoremler

1.) Bir seri yakınsak ise genel teriminin ∞ için limiti sıfırdır. Yani;

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsak} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ 'dır.}$$

Tersi doğru değildir.

Ös/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri $a_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
daima ıraksak.

2.) Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $N \geq 1$ için $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olmasıdır.

3.) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ ve $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha a$

4.) (İraksahlık testi veya n-terim testi)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi ıraksaktır.}$$

5.) İraksak bir serinin sıfırdan farklı katı yine ıraksaktır.

6) Eğer $\sum a_n$ yakınsak, $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum (a_n \mp b_n)$ ıraksaktır.

7) Eğer $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ iki ıraksak seri ise $\sum (a_n \mp b_n)$ yakınsak veya ıraksak olabilir.

$$\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad \text{ıraksak}$$

$$\sum b_n = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) + \dots \quad \text{ıraksak.}$$

$$\sum (a_n + b_n) = \sum 0 = 0 \quad \text{yakınsak.}$$

Örnekler:

1.) Aşağıdaki serilerin toplamlarını bulunuz.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

$a = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}, |r| < 1$ yak. $a = \frac{4}{3}, r = \frac{2}{3}, |r| < 1$ yak.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

$a = 4, r = \frac{1}{2}, |r| < 1$ yak.

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 1$$
$$r_1 = \frac{1}{2}, |r_1| < 1$$

yak.

$$a_2 = 1$$
$$r_2 = \frac{1}{3}, |r_2| < 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

n. terim testini uygularsak; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{(-1)^n} \cdot n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \cdot n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right| = 1 \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre seri ıraksaktır.

NOT: Pozitif terimlerden oluşan $\sum a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul kısmi toplamalar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır.

Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri (NOT: Testler sadece serinin karakterini belirler) serinin toplamı hakkında bilgi vermez

1. Integral Testi: Integral testi, pozitif terimli bir serinin, ona benzer şekilde davranan bir improper integralle karşılaştırmak suretiyle karakterini belirlemenize yardımcı olur.

Teorem: f fonksiyonu, bir pozitif N tamsayısı için, $[N, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve azalan bir fonksiyon olmak üzere $a_n = f(n)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\int_N^{\infty} f(n) dn$ ve $\sum a_n$ 'nin her ikisi ya yakınsaktır ya da ıraksaktır. (Genelde $N=1$ alınır)

Ör/1. (Harmonik seri)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n} = f(n)$$

$[1, \infty)$ 'da sürekli dir.

$$f'(n) = -\frac{1}{n^2} < 0 \text{ olduğundan azalandır.}$$

İntegral testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n} dn = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{n} dn = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\ln|n| \right]_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln a - \ln 1] = \infty \Rightarrow \text{İntegral testine göre verilen seri ıraksaktır.}$$

Ör/2. (p-serisi) ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ şeklindeki serilerdir.}$$

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n)$$

$[1, \infty)$ 'da sürekli dir.

$$f'(n) = -p n^{-p-1} < 0 \Rightarrow \text{İntegral testi uygulanabilir.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{n^p} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dn}{n^p} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-p+1} \cdot n^{-p+1} \right]_1^a$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right] = \begin{cases} \infty \text{ ırak} & ; p \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{p-1} \text{ yak} & ; p > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ör $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f(n)$$

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \quad [1, \infty) \text{ da } f(n) \text{ sürekli.} \left. \vphantom{\frac{n+1}{n}} \right\} \Rightarrow \text{integral testi uygulanabilir.}$$

$$f'(n) = \frac{-1/n^2}{1 + \frac{1}{n}} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = u \Rightarrow \frac{-1/n^2}{1 + \frac{1}{n}} dn = du \Rightarrow \frac{-1}{n(n+1)} dn = du, \quad dn = dv \Rightarrow n = v$$

$$\int_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) dn = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) dn = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]_1^a - \int_1^a \frac{-n}{n(n+1)} dn$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Big|_1^a - \int_1^a \frac{-1}{x(n+1)} dx \right]$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \left[a \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) - 1 \cdot \ln(1+1) \right] - \left[\ln(n+1) \Big|_1^a \right] \right\}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{\left[a \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \ln 2 \right]}_{\infty \cdot 0} + \left[\ln(a+1) - \ln 2 \right] \right\}$$

$$= -\ln 2 + \ln \infty - \ln 2$$

$$= \ln \infty = \infty \Rightarrow \text{seri integral testine göre ıraksaktır.}$$

2.) Karşılaştırma Testi

i) Direk (Doğrudan) Karşılaştırma (Genel olarak seçilen seri ya geo seri, ya harmonik seri ya da p-serisidir)

Teorem: $\sum \overset{\text{verilen}}{a_n}$ ve $\sum \overset{\text{seçilen}}{b_n}$ pozitif terimli seriler olmak üzere

- Eğer $\forall n$ için $a_n \leq b_n$ ve $\sum b_n$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.
- Eğer $\forall n$ için $a_n \geq b_n$ ve $\sum b_n$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{a(a+1)}}{\frac{1}{a}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{a+1} = 0$$

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{5}{5n-1} \quad b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ Harmonik seri ıraksaktır} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{karşılaştırma testine göre} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1} \text{ serisi de ıraksaktır.} \end{array} \right.$$
$$a_n = \frac{5}{5n-1} = \frac{1}{\frac{5n-1}{5}} = \frac{1}{n - \frac{1}{5}} > \frac{1}{n} = b_n \quad (\forall n \text{ için})$$

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} = \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2} = 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \left. \begin{array}{l} p\text{-serisi} \\ p=2 > 1 \text{ yak.} \end{array} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \text{ yakınsaktır. (yakınsak bir seriyi sıfırdan farklı bir sabit ile} \\ \text{çarpmak karakterini değiştirmez.)}$$

Karşılaştırma testine göre $\sum \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisi de yakınsaktır.

ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad a = \frac{1}{2} \quad r = \frac{1}{2}, \quad |r| = \frac{1}{2} < 1 \text{ yak.} \\ \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}}}_{a_n} < \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{b_n} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \text{ serisi de yakınsaktır.}$$

ör/ $5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \dots$ serisinin karakterini belirleyiniz.