Parametrik Denklemler ve Kutupsal Koordinatlar

Parametrik Denklemler

Eğrileri daha önce fonksiyon veya denklemlerin x ve y gibi iki değişkenli grafikleri olarak inceledik. Bir eğriyi her iki koordinatı bir t değişkeninin fonksiyonu olarak ifade eden yeni bir yöntemle ele alalım.

Tanım: Eğer x ve y koordinatları t değişkeninin I aralığında $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonları iseler o zaman bu denklemlerle tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. $x=f(t)$, $y=g(t)$ denklemlerine eğri için parametrik denklemler denir. t değişkeni eğri için bir parametre ve tanım kümesi olan I'da parametre aralığıdır. Eğer parametre aralığı kapalı bir aralık ise $(f(a),g(a))$ eğrinin başlangıç noktası, $(f(b),g(b))$ ise bitim noktasıdır.

Bir eğrinin parametrik denklemleri ve bir parametre aralığı verilmiş ise eğri parametrize edilmiştir denir.

$$\boxed{\begin{array}{ll} x=f(t) & \\ y=g(t) & a\le t\le b \end{array}} \longrightarrow \text{Eğrinin bir parametrizasyonu}$$

Ör/ Bir doğrunun parametrik denklemleri

(x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen doğru denklemi:

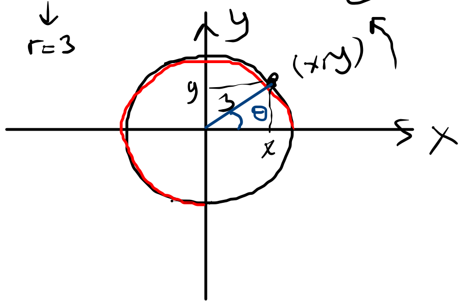
$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = t \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{array}\right\} \text{doğrunun parametrik denklemleri}$$

$-\infty < t < \infty$

Ör/ (Çember yayı)

$x^2 + y^2 = 9$ çemberini gözönüne alalım.

$\downarrow$
$r=3$



$x = 3\cos\theta$
$y = 3\sin\theta$

$\left(0 \le t \le \frac{3\pi}{2}\right)$

Ör/ (Elipsin parametrik denklemleri)

Parametrik Denklemler $\boxed{\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}}$ $0 \le t \le 2\pi$ $(a > b > 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = 1$$

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ kartezyen denklem

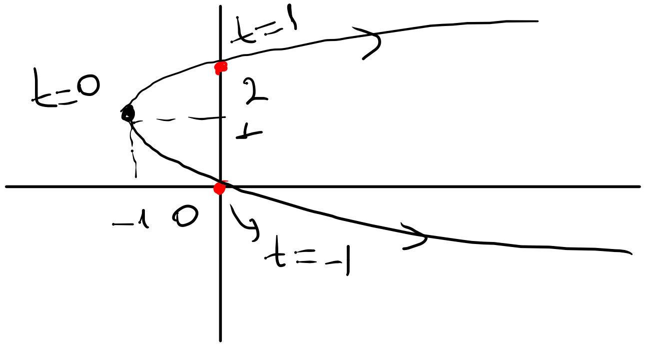
Ör/ $\left.\begin{array}{l} x = t^2 - 1 \\ y = t + 1 \end{array}\right\} -\infty \leq t \leq \infty$ parametrizasyonu ile verilmiş eğriyi tanımlayınız.

$t = y - 1 \Rightarrow x = (y-1)^2 - 1$ parabol.

$x' = 2(y-1)$

$2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = -1$



$t = -1 \Rightarrow x = 0$
$y = 0$

$t = 0 \Rightarrow x = -1$
$y = 1$

$t = 1 \Rightarrow x = 0$
$y = 2$

Ör/ Birim çemberi parametrize edelim. $x^2 + y^2 = 1$

- $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$ $\quad -1 \leq t \leq 1$
- $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $x = t - 1$, $y = \sqrt{1 - (t-1)^2} = \sqrt{2t - t^2}$ $\quad 0 \leq t \leq 2$

Ör/ $t>0$ olmak üzere $\left.\begin{array}{l} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{array}\right\}$ denklemleri ile parametrize edilen eğriyi tanımlayınız.

$$\left.\begin{array}{l} x+y = 2t \\ x-y = \frac{2}{t} \end{array}\right\} (x+y)(x-y) = 2\cancel{t}\cdot\frac{2}{\cancel{t}}$$

$x^2 - y^2 = 4$ hiperbol denklemi.

- $y = t$, $x = \sqrt{4+t^2}$ $\quad -\infty < t < \infty$
- $\left.\begin{array}{l} x = 2\sec t \\ y = 2\tan t \end{array}\right\}$ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

Teğetler ve Alanlar

Eğer f ve g fonksiyonları bir t noktasında türevlenebilir ise $x = f(t)$, $y = g(t)$ fonksiyonları da t noktasında türevlenebilirler, x ve y bir parametrik eğri gösteriyorsa bu türevlenebilir eğri üzerindeki bir noktada y'de x'in türevlenebilir fonksiyonu olduğunda

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dt}$ ve $\frac{dy}{dt}$ türevleri arasındaki ilişki zincir kuralı ile verilir.

1. $x = f(t)$
$y = g(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y = F(x) = F(f(t)) = F_1(t)$$

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

2. Mertebe türev

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$= \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x=t-t^2 \\ y=t-t^3 \end{array}\right\} \Rightarrow y''=?$

$\dot{x}=1-2t \qquad \ddot{x}=-2$

$\dot{y}=1-3t^2 \qquad \ddot{y}=-6t$

$x=t(1-t)$

$y=t(1-t^2)=t(1-t)(1+t)$

$y-x=1+t$

$t=y-x-1$

$$y''=\frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{(\dot{x})^3}=\frac{-6t\cdot(1-2t)+2(1-3t^2)}{(1-2t)^3}$$

$$=\frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}=$$

$$=\frac{6[y-x-1]^2-6[y-x-1]+2}{[1-2(y-x-1)]^3}$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x=\sec t \\ y=\tan t \end{array}\right\} -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ parametrizasyonu ile verilen eğrinin $(\sqrt{2},1)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$\dot{x}=\sec t\cdot\tan t$

$\dot{y}=\sec^2 t$

$$y'=\frac{\sec^{\cancel{2}} t}{\cancel{\sec t}\cdot\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{1}{\sin t}$$

$$y'\Big|_{t=\pi/4}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

$x=\sqrt{2}\Rightarrow \sec t=\sqrt{2}$

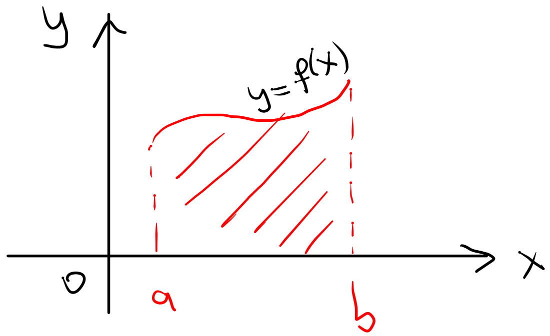
$\cos t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$t=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$y=1\Rightarrow \tan t=1$

$t=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$\Big\}\ t=\frac{\pi}{4}$



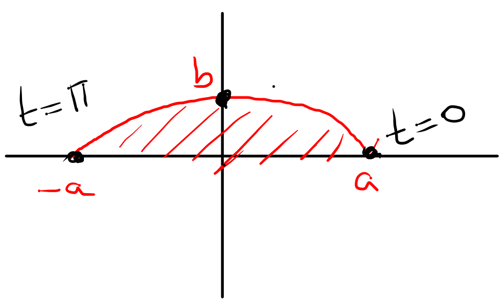
$$A=\int_a^b y\,dx$$

$$x=f(t)$$
$$y=g(t)$$

$$A=\int_{t_1}^{t_2} g(t)\cdot f'(t)\,dt$$

1. a noktası ve b noktası için t'nin alacağı değer belirlenir.
2. y yerine g(t) yazılır.
3. dx yerine $dx=f'(t)\,dt$ t cinsinden değeri yazılır.

Ör/ $\left.\begin{aligned} x&=a\cos t\\ y&=b\sin t\end{aligned}\right\}$ $0\le t\le\pi$ şeklinde parametrize edilen bölgenin alanını bulunuz.



$t=0 \Rightarrow x=a,\ y=0$

$t=\pi \Rightarrow x=-a,\ y=0$

$t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=0,\ y=b$

$$A=2\int_0^a y\,dx$$

$$=2\int_{\pi/2}^{0} \underbrace{(b\sin t)}_{y}\ \underbrace{(-a\sin t)\,dt}_{dx}$$

$dx=-a\sin t\,dt$

$$=-2ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = ab\int_0^{\pi/2}dt - ab\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt$$

$$= ab\,t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{ab}{2}\cancel{\sin 2t}\Big|_0^{\pi/2}$$

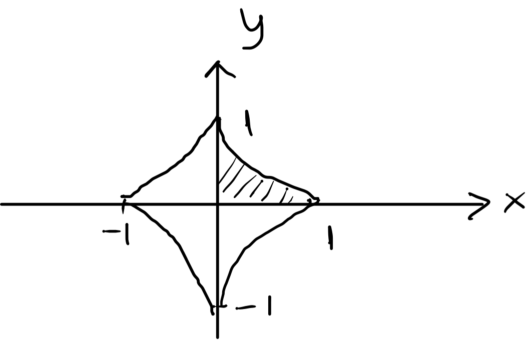
$$=\frac{ab\pi}{2}\ br^2$$

Ör) $\left.\begin{array}{l} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{array}\right\}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ parametrizasyonu ile verilen astroid eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1$$

$t=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}$, $t=2\pi \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}$

$t=\pi \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \end{array}$ $t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}$ $t=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=-1 \end{array}$



$$A=4\int_0^1 y\,dx = 4\int_{\pi/2}^{0} \sin^3 t \cdot (-3\cos^2 t \sin t)\,dt$$

$$dx=-3\cos^2 t \sin t \, dt$$

$$=12\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cdot \cos^2 t \, dt$$

$$=12\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{3\pi}{8}\ br^2$$

Parametrik Denklemleri ile Verilmiş Eğrinin Uzunluğu $\quad y = F(x)$

Eğer c eğrisi $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ ile $a \le t \le b$ aralığında parametrik olarak tanımlanıyorsa (f' ve g', $[a,b]$ aralığında sürekli ve aynı zamanda sıfır olmayan fonksiyonlar) ve $t = a$'dan $t = b$'ye artarken c eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa bu durumda c eğrisinin uzunluğu

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \cdot f'(t)\, dt$$

$$dx = f'(t)\, dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\cancel{f'(t)}}}\right) \cancel{f'(t)}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}\right\}$ $0 \le t \le 2\pi$ parametrizasyonuyla verilmiş eğrinin uzunluğunu bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = -r\sin t \\ \dot{y} = r\cos t \end{array}\right\} \Rightarrow s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = r\int_0^{2\pi} dt = rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r \text{ br}$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{array}\right\}$ $0 \le t \le 2\pi$ parametrizasyonuyla verilen astroid eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = -3\cos^2 t \sin t \\ \dot{y} = 3\sin^2 t \cos t \end{array}\right\} \quad s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$

$\sin t = u$

$\cos t\, dt = du$

$t = 0 \Rightarrow u = 0$

$t = \pi/2 \Rightarrow u = 1$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t\, dt = 12\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\, dt = 12\int_0^1 u\, du = 12\frac{u^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= 6 \text{ br}$$