$$a_n(y) = \begin{cases} \sinh \frac{n\pi y}{L} & 0 \le y < T \\ \sinh \frac{n\pi (L'-y)}{L} & T < y \le L' \end{cases}$$

$$\frac{d^2 a_n(y)}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n(y) = \delta(y-Y) \cdot f_n(X) \quad 0 < y < L'$$

$$a_n(0) = 0, \quad a_n(L') = 0$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + g(x,T) = \delta(x-X)$$

$$v(y) = \sinh \frac{n\pi y}{L} \qquad u(y) = \sinh \frac{n\pi (L'-y)}{L}$$

$$v'(y) = \frac{n\pi}{L} \cosh \frac{n\pi y}{L} \qquad u'(y) = -\frac{n\pi}{L} \cosh \frac{n\pi (L'-y)}{L}$$

$$\frac{d}{dx}\left[a_0 \frac{dy}{dx}\right] + a_1 y = f(x)$$

$$a_n(y) = \frac{1}{J(u,v)} \left[u(y) v(Y) H(Y-y) + u(Y) v(y) H(y-Y) \right]$$

$$p(x) y'' + q(x) y' + r(x) y = f(x)$$

$$J(u,v) = a_0 [u'v - uv']$$

$$[u'v - uv'] = -\frac{n\pi}{L} \cosh \frac{n\pi (L'-y)}{L} \cdot \sinh \frac{n\pi y}{L} - \frac{n\pi}{L} \cosh \frac{n\pi y}{L} \sinh \frac{n\pi (L'-y)}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{f_n(X)}$$

$$= -\frac{n\pi}{L} \sinh \left[\frac{n\pi y}{L} + \frac{n\pi (L'-y)}{L} \right] = -\frac{n\pi}{L} \sinh \left[\frac{n\pi L'}{L} \right]$$

$$J(u,v) = \frac{1}{f_n(X)} \cdot \left(\frac{-n\pi}{L} \right) \cdot \sinh \left(\frac{n\pi L'}{L} \right) \qquad f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi X}{L}} \cdot \left(\frac{-n\pi}{L} \right) \cdot \sinh \left(\frac{n\pi L'}{L} \right) = \frac{-n\pi}{\sqrt{2L}} \frac{\sinh \left(\frac{n\pi L'}{L} \right)}{\sin \left(\frac{n\pi X}{L} \right)}$$

Böylece, çift serili tam özfonksiyon genişlemesinde elde ettiğimiz Green fonksiyonu için tek serili kısmi özfonksiyon genişlemesiyle alternatif bir ifade

$$G(x,y;X,Y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(y)\cdot f_n(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2L}\cdot\sin\frac{n\pi X}{L}}{-n\pi\sinh\frac{n\pi L'}{L}}\right)\left(\sinh\frac{n\pi(L'-y)}{L}\cdot\sinh\frac{n\pi Y}{L}H(Y-y)+\sinh\frac{n\pi(L'-Y)}{L}\cdot\sinh\frac{n\pi y}{L}H(y-Y)\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n\pi}\right)\left(\frac{\sin\frac{n\pi X}{L}\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}}{\sinh\frac{n\pi L'}{L}}\right)\cdot\left[\sinh\frac{n\pi(L'-y)}{L}\sinh\frac{n\pi Y}{L}H(Y-y)+\sinh\frac{n\pi(L'-Y)}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}H(y-Y)\right] \quad (*)$$

$G(x,y;X,Y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, f_n(y)$ şeklinde de alabiliriz.

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n\pi}\right)\left(\frac{\sin\frac{n\pi Y}{L'}\cdot\sin\frac{n\pi y}{L'}}{\sinh\frac{n\pi L}{L'}}\right)\left[\sinh\frac{n\pi(L-x)}{L'}\sinh\frac{n\pi X}{L'}H(X-x)+\sinh\frac{n\pi(L-X)}{L'}\sinh\frac{n\pi x}{L'}H(x-X)\right] \quad (**)$$

$$G(x,y;X,Y)=\begin{cases}\sum \dfrac{-2\sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi(L'-Y)}{L}\right)}{n\pi\sinh\frac{n\pi L'}{L}} & 0\le y\le Y\\[2ex] \sum \dfrac{-2\sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi Y}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi(L'-y)}{L}\right)}{n\pi\sinh\frac{n\pi L'}{L}} & Y\le y\le L'\end{cases}$$

$$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

(*) ve (**)'dan hangi ifadeyi kullanmanız gerektiği sorusu aklımıza gelebilir. Bu Fourier serilerinin herbirinin yakınsaklığı, katsayıların göreceli büyüklüklerine bağlıdır.

(*)'daki $\sin\frac{n\pi x}{L}$'nin katsayısı $y>Y$ için

$$\frac{-2\sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi Y}{L}\right)\cdot\sinh\left(\frac{n\pi(L'-y)}{L}\right)}{n\pi\sinh\frac{n\pi L'}{L}}$$

n'in büyük değerlerinde hiperbolik fonksiyonlardaki negatif üstelleri bırakıp yerine

$$-\frac{\sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right)\cdot e^{\frac{n\pi Y}{L}}\cdot e^{\frac{n\pi(L'-y)}{L}}}{n\pi\cdot e^{\frac{n\pi L'}{L}}}=-\frac{1}{n\pi}\cdot\sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right)\cdot e^{\frac{n\pi}{L}(Y-y)}$$ alabiliriz.

$G(x,y;X,Y)$ Green fonksiyonunu Y'den büyük ölçüde farklı olan bir y değerinde hesaplamak için (*)'ı, X'den büyük ölçüde farklı olan bir x değerinde hesaplamak için (**)'ı kullanırız.

3) Bölme Yöntemi

Bazı durumlarda $G(x,y;X,Y)$ Green fonksiyonunu $G=u+g$ şeklinde gözönüne almak daha uygun olur. Burada u, Green fonksiyonunun delta fonksiyonuna göre tekil kısmını, g ise L operatörü ile ilişkili olarak sınır şartlarının sağlanmasını garanti eder. Yani, u

$$Lu=\delta(x-X,y-Y)$$

denklemini sağlayan fonksiyon ve g

$$Lg=0 \qquad (x,y)\in A$$

$$g=-u \qquad (x,y)\in\beta(A)$$

$$\begin{array}{ll} LG=\delta(x-X,y-Y) & Lg=0 \\ G=0 & g=0 \end{array}$$

$$G=u+g$$

sınır değer problemini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $G=u+g$ şeklinde Green fonksiyonunu gözönüne alalım. $u(x,y,X,Y)$ fonksiyonunun sınır şartlarını sağlaması gerekmediğinden çoğunlukla bu fonksiyon L operatörünün free-space (boş-alan) Green fonksiyonu olarak adlandırılır.

Boyut / operatör	İki boyutta (düzlemde)	Üç boyutta (uzayda)
Laplace ∇^2	$\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}$	$-\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}}$
Helmholtz ∇^2+k^2	$\frac{1}{4}Y_0\, k\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}$	$-\frac{e^{ikr}}{4\pi}$, $-\frac{e^{-ikr}}{4\pi}$
Modifiye Helmholtz ∇^2-k^2	$-\frac{1}{2\pi}K_0\, k\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}$	$-\frac{e^{kr}}{4\pi r}$, $-\frac{e^{-kr}}{4\pi r}$

Ör/ $0 \le r \le r_0$ dairesi üzerinde Laplace denklemi ile ilişkili Dirichlet problemi için Green fonk. bulunuz.

Merkezi orjinde r_0 yarıçaplı daire üzerindeki Laplasyen için Dirichlet problemi ile ilişkili Green fonksiyonu

$$\begin{cases} \nabla^2 G(r,\theta;R,\Theta) = \delta(r-R,\theta-\Theta) & 0<r<r_0 \quad -\pi<\theta<\pi \\ G(r,\theta;R,\Theta) = 0 & -\pi<\theta<\pi \end{cases}$$

problemini sağlar.

$$\left.\begin{array}{ll} x=r\cos\theta & X=R\cos\Theta \\ y=r\sin\theta & Y=R\sin\Theta \end{array}\right\} \quad u(r,\theta;R,\Theta)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(r\cos\theta-R\cos\Theta)^2+(r\sin\theta-R\sin\Theta)^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\left(r^2+R^2-2rR\cos(\theta-\Theta)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2 g=0 \\ g=-u \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \nabla^2 g=0 & 0<r<r_0,\ -\pi<\theta<\pi \\ g(r_0,\theta;R,\Theta)=-\frac{1}{4\pi}\ln\left(r_0^2+R^2-2r_0R\cos(\theta-\Theta)\right) & -\pi<\theta<\pi \end{array}$$