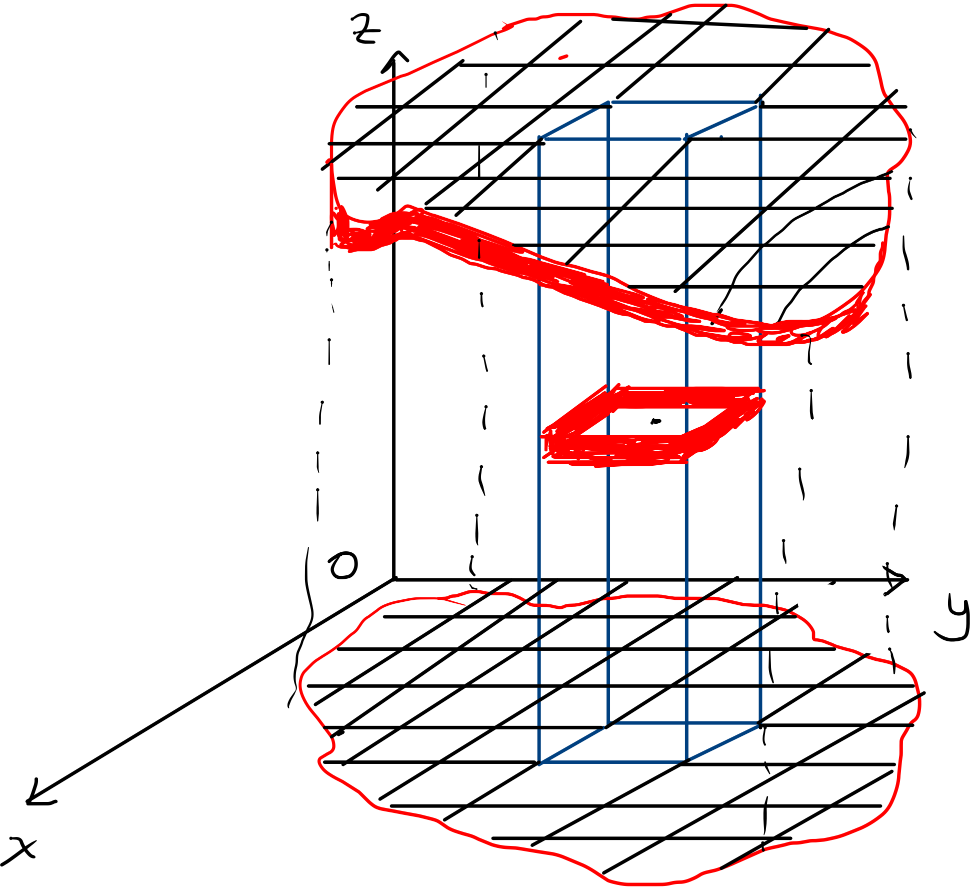


$u=f(x,y,z)$ fonksiyonu bir S hiperyüzeyi ile sınırlı ve V uzay bölgesinde tanımlı ve de sürekli olsun.

Bu bölgeyi hacimleri ΔV_k $(k=1,\dots,n)$ olan kısmi bölgelere ayıralım. Bu kısmi bölgelerin herhangi bir noktası $(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)$ olsun.

$\sum f(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)\cdot \Delta V_k$ toplamını bulalım.

ΔV_k hacimlerinin herbirinin sıfıra yaklaşması halinde toplamın limitini alalım.

Bu toplamın limitine f fonksiyonunun V uzay bölgesinde üç katlı integrali denir.

$$\lim_{\substack{\Delta V_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)\,\Delta V_k = \iiint_V f(x,y,z)\,dV$$

şeklinde gösterilir.

Düzgün bölge

Eğer **V** bölgesinin bir iç noktasından geçen ve oz-eksenine paralel bir doğru S yüzeyini en çok iki noktada kesiyorsa ve **V** bölgesinin xoy düzlemi üzerindeki izdüşümü düzgün bir bölge ise **V** bölgesine düzgün bölge denir. $u=f(x,y,z)$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV=\iint_D\left[\int_{z_1=\varphi_1(x,y)}^{z_2=\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dA$$

$$=\int_a^b\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

V bölgesi $z_1=\varphi_1(x,y)$, $z_2=\varphi_2(x,y)$ yüzeyleri ile sınırlanmış bir bölge ve bu bölgenin xoy düzlemindeki izdüşümü olan D bölgesi de $y=\psi_1(x)$, $y=\psi_2(x)$; $x=a$, $x=b$ eğrileri ile sınırlanmış bir bölgedir.

Eğer $f(x,y,z)\equiv 1$ alınırsa $V=\iiint_V dV$ integrali V bölgesinin hacmini verir.

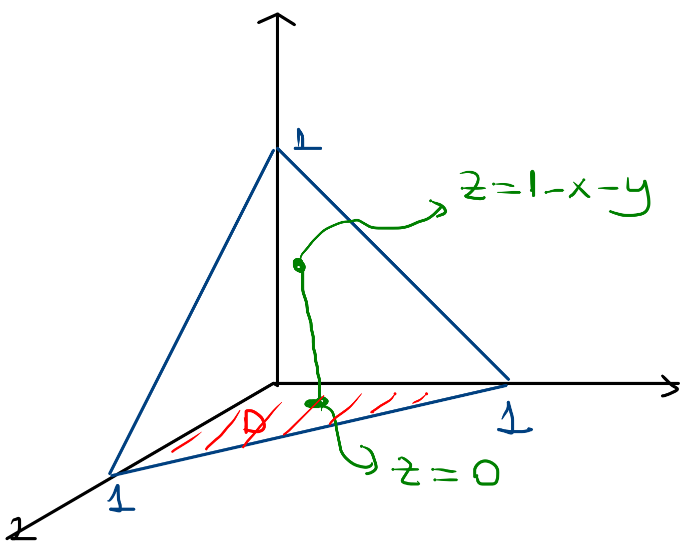
Eğer $f(x,y,z)$, V bölgesini oluşturan maddenin yoğunluğu olarak alınırsa tanımlanan üç katlı integral bu maddenin kütlesini verir.

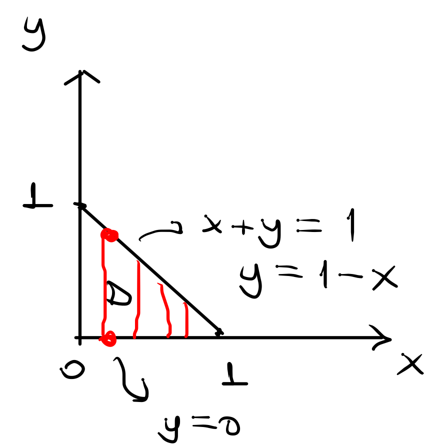
Örnekler:

1.) V katı cismi $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ düzlemlerinin sınırladığı düzgün dörtyüzlüdür.

$$I=\iiint_V z\,dV$$

integralini hesaplayınız.





$$I=\iint_D \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dA=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y}\right)dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 \, dy\, dx$$

$1-x-y = t$ $\qquad y=0 \Rightarrow t = 1-x$

$-dy = dt$ $\qquad y = 1-x \Rightarrow t = 0$

$dy = -dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{1-x}^{0} t^2 (-dt)\, dx$$

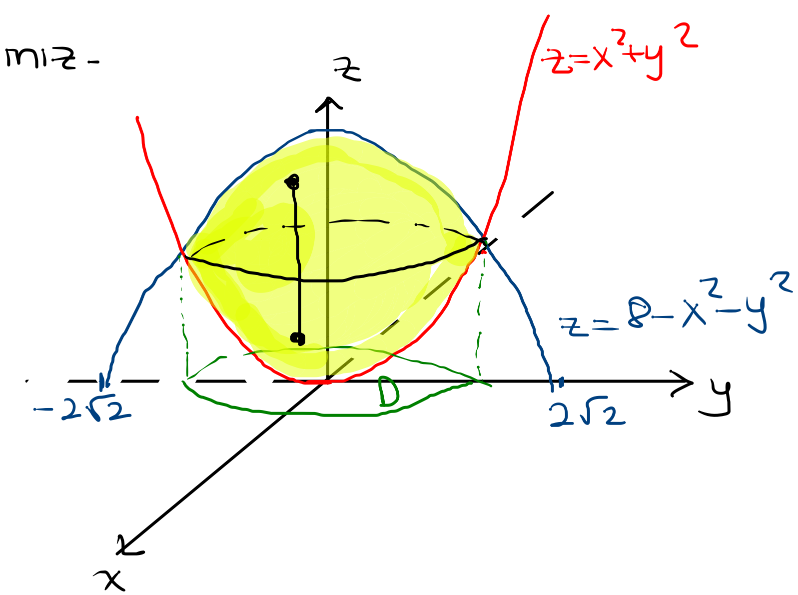
$1-x = u \Rightarrow -dx = du \Rightarrow dx = -du$

$x=0 \Rightarrow u=1 \,,\; x=1 \Rightarrow u=0$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} t^2\, dt\, dx$$

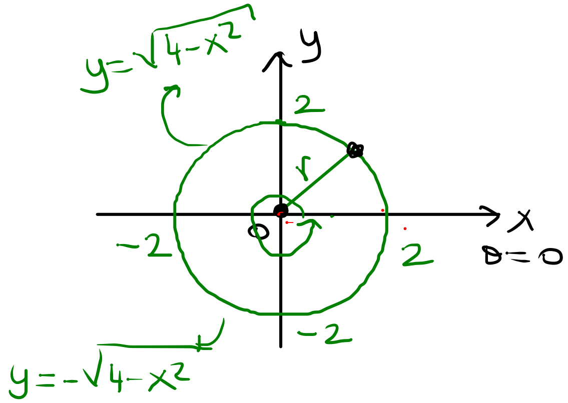
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^{1-x}\right) dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\, dx = \frac{1}{6}\int_1^0 u^3 \cdot (-du) = \frac{1}{6}\int_0^1 u^3\, du = \frac{1}{6}\cdot \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

2) $z = 8 - x^2 - y^2$ ve $z = x^2+y^2$ paraboloidleri arasında kalan cismin hacmini üç katlı integralle hesaplayınız.



$$V = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1 \cdot dz\, dA = \iint_D \left(z \Big|_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} \right) dA$$

$$= \iint_D \left(8 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2\right) dA = \iint_D \left[8 - 2(x^2+y^2)\right] dA$$



D bölgesi çembersel bölge olduğundan kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparız.

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$J = r$

$$V = \iint_D \left[8 - 2(x^2+y^2)\right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (8-2r^2)\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (8r-2r^3)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[4r^2 - \frac{r^4}{2}\Big|_0^2\right] d\theta = \int_0^{2\pi} 8\,d\theta$$

$$= 8\theta\Big|_0^{2\pi} = 16\pi \ br^3$$

Kartezyen koordinatlarda hesaplasaydık;

$$V = 4\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

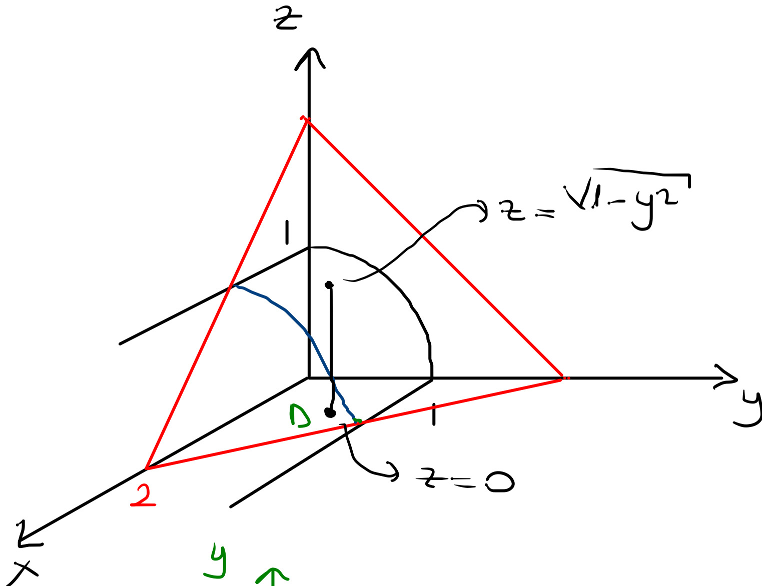
3) V bölgesi $y^2+z^2=1$, $x=0$, $x+y+z=2$ ile sınırlı bölge olduğuna göre bu V uzay bölgesinin hacmini hesaplayınız.

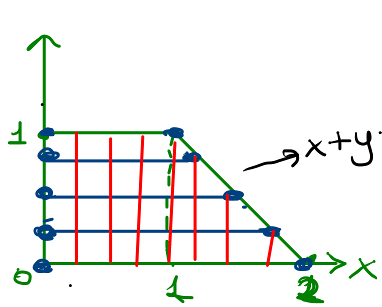
$z = 2 - x - y$

$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right\} x = 1$

$y^2 + z^2 = 1$

$z = 0,\ y = 1 \Rightarrow 1 = 1$





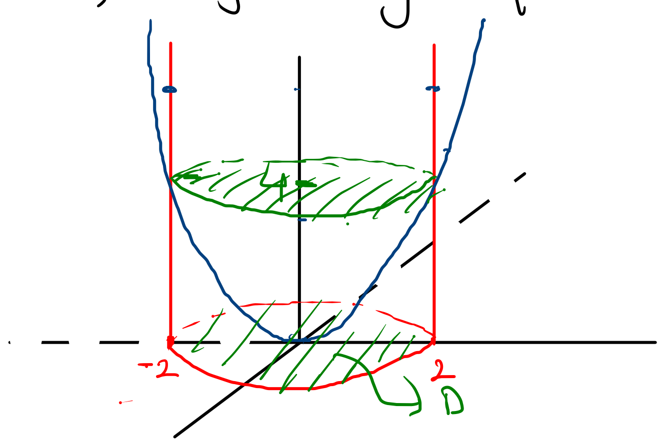
V Bölgesi dilim bölgedir.

$$V = \iint_D \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dA$$

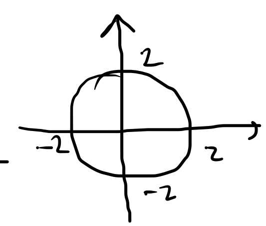
$$= \int_0^1 \int_0^{2-y} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$$

4) $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.



$$V = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{4} dz\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \Big(\int_{\underbrace{x^2+y^2}_{=r^2}}^{4} dz \Big) r\, dr\, d\theta$$



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$J = r$