Polinom ve Rasyonel Fonksiyonların Limiti

1. Eğer $P(x)$ bir polinom ve a bir reel sayı ise o zaman

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

2. Eğer $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlar ve $Q(a) \neq 0$ ise o zaman

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Sonsuzda Limitler

- f fonksiyonu (a, ∞) aralığında tanımlı ve x'i yeterince büyük alarak fonksiyonun L gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x sonsuza yaklaşırken f'de L limitine yaklaşır deriz ve

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

şeklinde gösteririz.

- f fonksiyonu $(-\infty, b)$ aralığında tanımlı ve x'i negatif ve de mutlak değer olarak yeterince büyük alarak fonksiyonun L gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x negatif sonsuza yaklaşırken f'de L limitine yaklaşır deriz ve

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$ şeklinde gösteririz.

Ör/ $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ör/ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ limitlerini hesaplayınız.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

NOT: Sadece sabit polinomlar $\mp\infty$'da limite sahiptirler

Polinom ve Rasyonel Fonksiyonlar için sonsuzda limitler

- Bir polinomdaki en yüksek dereceli terimin ∞ ve $-\infty$ 'daki limiti polinomun limitini belirler.

Ör/

- $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3-x^2+2)=\lim\limits_{x\to\infty}3x^3=\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-5x^3-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3-x^2+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}3x^3=-\infty$

- $$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{\overbrace{P(x)}^{m.\text{ dereceden polinom}}}{\underbrace{Q(x)}_{n.\text{ dereceden polinom}}}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_mx^m}{b_nx^n}=\begin{cases}\infty\ (\text{limit yok}), & m>n \text{ ise}\\ \dfrac{a_m}{b_n} & m=n \text{ ise}\\ 0 & m<n \text{ ise}\end{cases}$$

Ör/

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\cdot\frac{\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]}{\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$ bu limit mevcut değildir.

$x \to -\infty$ için $-x > 0$ olduğundan $\sqrt{x^2+x} - x > \sqrt{x^2+x}$ olur. Bu da $x \to -\infty$ için $\sqrt{x^2+x} - x$ 'in keyfi olarak büyüdüğünü gösterir.

NOT: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$ oluyorsa

1°) Limiti alınan ifade iki kesrin farkından oluşmuşsa payda eşitlenir.

2°) Limiti alınan ifade irrasyonel fonksiyonların farkından oluşmuşsa eşlenik ile çarpılıp bölünür.

3°) $\dfrac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)\,g(x)}}$ şeklinde yazılmak suretiyle $\frac{0}{0}$ B.ş. 'ne getirilerek çözülür.

veya

$$\lim_{x \to \mp\infty} \sqrt{x^2+px+q} = \lim_{x \to \mp\infty} \left|x + \frac{p}{2}\right| = \begin{cases} x>0 \text{ için } \lim\limits_{x \to \infty} \left|x + \frac{p}{2}\right| = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x + \frac{p}{2}\right) \\ x<0 \text{ için } \lim\limits_{x \to -\infty} \left|x + \frac{p}{2}\right| = \lim\limits_{x \to \infty} \left(-x - \frac{p}{2}\right) \end{cases}$$

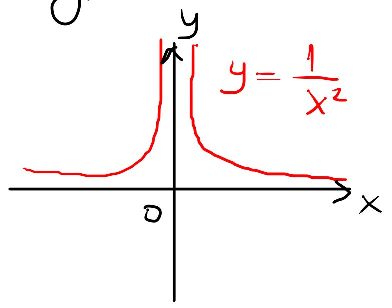
Sonsuz Limitler

Değerleri keyfi olarak büyüyen fonksiyonlara sonsuz limite sahiptir denir. Ancak "sonsuz" bir sayı olmadığından bu limitler gerçekte limit değildirler. Bu limitler keyfi olarak büyüyen fonksiyonların davranışını belirlemek için kullanılır.

Ör/ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonunun $x=0$ civarındaki davranışını belirleyiniz.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\infty$$

Limit yoktur.



Örnekler

1) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2} = 0$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

3) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \infty$

$\displaystyle \lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$

Limitin Formal Tanımı

Eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için $0<|x-a|<\delta$ iken $x\in D(f)$ için $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa o zaman x a'ya yaklaşırken $f(x)$ L limitine yaklaşır denir ve $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ şeklinde gösterilir.

NOT: Limitin formal tanımı, fonksiyonun limitini nasıl bulacağımızı söylemez. Sadece şüphelendiğimiz limitin doğruluğunu kanıtlamamıza imkan verir.

Ör/ $\lim\limits_{x\to a} x=a$ olduğunu gösteriniz.

$\forall\varepsilon>0$ için $0<|x-a|<\delta$ iken $x\in D(f)$ için $|f(x)-a|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulmalıyız.

$|f(x)-a|=|x-a|<\varepsilon \Rightarrow$ $\delta=\varepsilon$ alınırsa $\lim\limits_{x\to a} x=a$ dır.

Ör/ $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$ olduğunu gösteriniz.

$\forall\varepsilon>0$ için $0<|x-2|<\delta$ iken $x\in D(f)$ için $|x^2-4|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulmalıyız.

1-(0)

$|x^2-4|=|x-2||x+2|<\delta.|x+2|\leq 5\delta=\varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta=\frac{\varepsilon}{5}}>0$

$\delta\leq 1$ $\quad |x-2|<\delta\leq 1 \Rightarrow -1\leq x-2\leq 1 \Rightarrow 3\leq x+2\leq 5$

2-yol

$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |x-2|<\delta \Rightarrow -\delta<x-2<\delta \Rightarrow 2-\delta<x<2+\delta$

$|x^2-4|<\varepsilon$

$\Rightarrow 4-4\delta+\delta^2<x^2<4+4\delta+\delta^2$

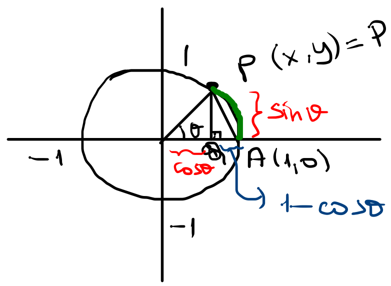
$-4\delta+\delta^2<x^2-4<4\delta+\delta^2$

$-5\delta<x^2-4<5\delta \Rightarrow |x^2-4|<5\delta=\varepsilon$

$0<\delta<1$
$\Downarrow$
$-\delta<\delta^2<\delta$

$$\boxed{\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0}$$

$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$, $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$ 'dir.



$\overline{PQ}=\sin\theta$

$\overline{QA}=1-\cos\theta$

$\overset{\triangle}{PQA}$ 'ne göre $(\overline{PA})^2=(\overline{PQ})^2+(\overline{QA})^2=\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2-2\cos\theta=2(1-\cos\theta)$

$\overline{PA}$ doğru parçasının uzunluğu $\overset{\frown}{PA}$ yayının uzunluğundan daha küçük olduğundan

$\overline{PA}<\overset{\frown}{PA} \Rightarrow \sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2<\theta^2 \Rightarrow 0<|\sin\theta|<\theta$

$0<|1-\cos\theta|<\theta$

$\lim_{\theta\to 0}0=0$, $\lim_{\theta\to 0}\theta=0$

$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$

$\lim_{\theta\to 0}1-\cos\theta=0$

$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$

Belirsiz Şekiller

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ şeklindeki ifadeler belirsizdirler.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\to\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\cot x^2}\to\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x} = \infty^0$$

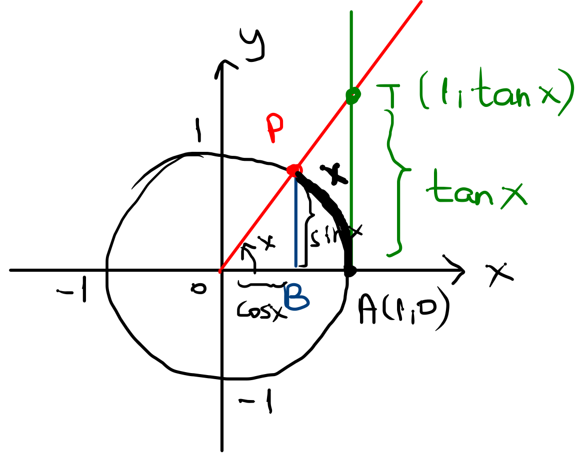
$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)\to 0.\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\tan x-\frac{1}{\pi-2x}\right)\to\infty-\infty$$

Trigonometrik fonksiyonlarda limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$



$\boxed{r=1}$

$\pi r^2 \qquad 2\pi$

$? \qquad x$

$\frac{\cancel{\pi} \cdot x}{2\cancel{\pi}}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ alalım.

Alan $\overset{\triangle}{POB}$ < Alan $\overset{\frown}{POA}$ < Alan $\overset{\triangle}{TOA}$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x < x < \tan x$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow$$

Sandaviç teo. göre

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Örnekler

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+x^2-5}{4x^4-x^2+6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\cancel{x^4}}{4\cancel{x^4}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{x^2+3} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^3-3x-2} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}(x-2)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$

$= \infty$

$(x^3-x)+(-2x-2)$

$x(x^2-1)-2(x+1)$

$x(x-1)(x+1)-2(x+1)$

$(x+1)[x^2-x-2]$

$(x+1)\ (x+1)(x-2)$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)-\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)}{x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left[(x+1)-\sqrt[3]{x^3+1}\right]\left[(x+1)^2+(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\right]}{x\cdot\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\right]}$

$A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

$A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^3-(x^3+1)}{x\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\right]} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+3x}{x\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\right]}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+3}{\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\right]} = \dfrac{3}{3} = 1$

5) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 + x\sin 3x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x^2}{x\sin x} + \frac{x\sin 3x}{x\sin x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1} + \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\cdot 3\right]$$

$$= 1 + 3$$

$$= 4$$

6) $$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sqrt{2+\cos x}}{1-\sqrt{1+\sin x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{1-(2+\cos x)\,.\,[1+\sqrt{1+\sin x}]}{1-(1+\sin x)\,.\,[1+\sqrt{2+\cos x}]} = \lim_{x\to\pi} \frac{(-1-\cos x)}{\sin x}\cdot\frac{[1+\sqrt{1+\sin x}]}{[1+\sqrt{2+\cos x}]} = 0$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos^2 x}{\sin x\,(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{\sin x}.(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

SÜREKLİLİK

Fonksiyonların çoğunun tanım kümesi aralık veya ayrık aralıkların birleşimi şeklindedir. P noktası böyle bir fonksiyonun tanım kümesine ait olmak üzere, eğer P noktası tanım kümesi içinde kalan açık bir aralık içinde bulunuyorsa, P'ye kümenin iç noktası denir. Aksi taktirde P'ye uç nokta denir.

Örneğin; $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonu için $D(f)=[-2,2]$ olduğundan $(-2,2)$ aralığındaki tüm noktalar iç nokta, $x=-2$ ve $x=2$ uç noktalardır.

$g(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu için ise $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ olduğundan tüm noktalar iç noktadır. Fonksiyonun tanım kümesinin uç noktaları yoktur.

İç noktada süreklilik

a noktası fonksiyonun tanım kümesinin bir iç noktası olmak üzere eğer

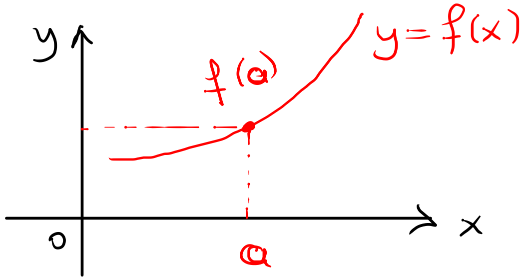
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu x = a'da süreklidir denir. Yani fonksiyonun x=a'da sürekli olması için

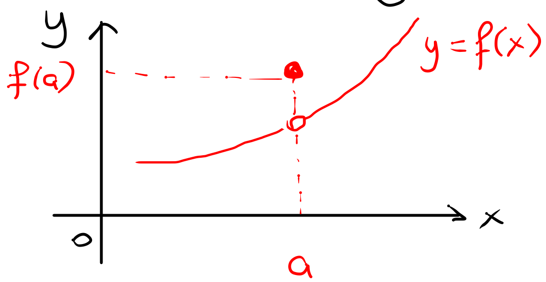
1°) f, x=a'da tanımlı olmalı, 2°) $\lim_{x\to a} f(x)$ mevcut olmalı. 3°) $L=f(a)$ olmalı.

$\left(\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L\right)$

Bu şartlardan herhangi biri sağlanmıyorsa f fonksiyonu x=a'da süreksizdir denir.

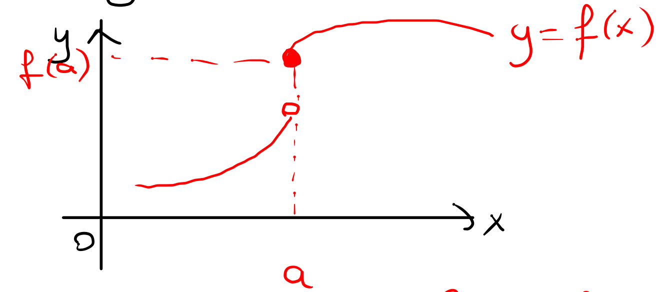


f, a'da sürekli



$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

f, a'da süreksiz
(Kaldırılabilir süreksiz)



$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

f, a'da süreksizdir.
(Sıçramalı süreksiz)

NOT: Bir fonksiyon uç noktalarda limite sahip olmamasına karşın, kenar limitlere sahip olabilir.

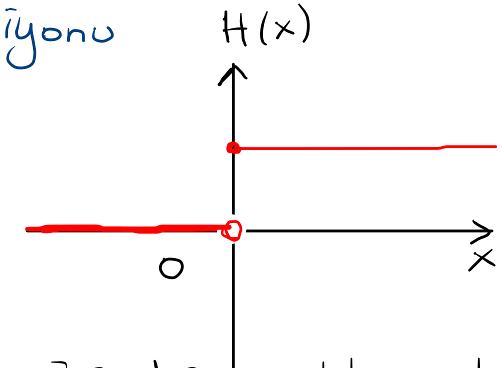
Sağ ve Sol süreklilik:

Eğer $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ise f a'da soldan süreklidir,

$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ ise f a'da sağdan süreklidir denir.

Ör/ Heaviside (Birim basamak) Fonksiyonu

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$H(0) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0)$ soldan süreksiz.

$\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1 = H(0)$ sağdan sürekli

Teorem: Bir fonksiyonun tanım kümesinin bir noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul o noktada sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.

Uç noktada süreklilik