Not: Tüm polinomlar, tüm rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ şeklindeki fonksiyonlar, mutlak değer fonksiyonu tanımlı oldukları her yerde sürekli olan fonksiyonlardır.

Teorem:

Eğer f ve g fonksiyonlarının her ikisi de bir a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve her ikisi de a noktasında sürekli iseler o zaman

- $f \mp g$
- $k \cdot f \quad (k \in \mathbb{R})$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$ olması koşuluyla
- $[f]^{1/n}$ (n çift iken $f(a) > 0$ olması koşuluyla)

Sürekli fonksiyonların bileşkesi

Eğer $f[g(x)]$ a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve eğer f L'de sürekli ve de $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ ise o zaman

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f(L)\text{'dir.}$$

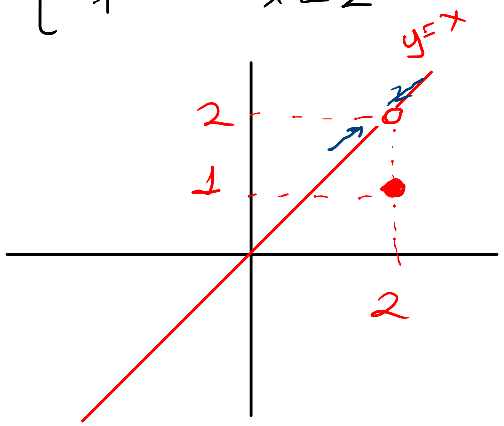
Özel olarak $g(x)$ a'da sürekli ise ($\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$ ise) o zaman

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = f[g(a)]$$

dır.

Süreksizlik

Ör/ $g(x)=\begin{cases} x & x\neq 2 \\ 1 & x=2\end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$'de sürekliliğini inceleyiniz.



$g(2)=1$ tanımlı

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = 2 \neq g(2)$$

Fonksiyon $x=2$'de tanımlı ve limite sahiptir.
Ancak limit değeri bu noktadaki değerine eşit olmadığından kaldırılabilir süreksizdir.

Ör/ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x\neq 0 \\ 2 & x=0\end{cases}$ fonksiyonu $x=0$'da sürekli midir?

$f(0)=2$ tanımlı $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2} \neq f(0) = 2$$

f fonksiyonu $x=0$'da kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir.

Ör/ $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & |x|>1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=-1$ ve $x=1$'de sürekliliğini inceleyiniz.

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & x<-1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & x>1 \end{cases}$$

$f(-1) = 0 = f(1)$ tanımlı.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1-x^2) = 0 \end{array}\right] \neq$$

$x=-1$'de limit yok.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x^2) = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \end{array}\right] \neq$$

$x=1$'de limit yok.

* f fonksiyonunun $x=a$'da sağ ve sol limitleri mevcut ve birbirinden farklı ise fonksiyon $x=a$'da sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

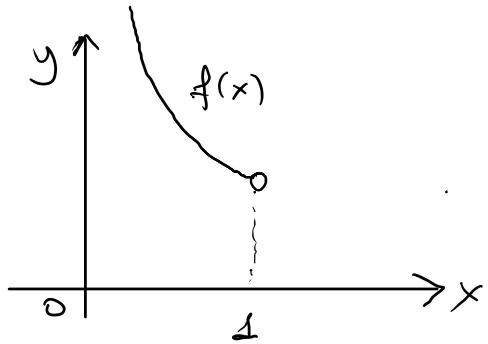
* f fonksiyonunun limiti mevcut değilse (limit değeri sonlu değilse) fonksiyon limit alınan noktada sonsuz süreksizliğe sahiptir denir.

Teorem: (Max-min teoremi)

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli ise o zaman $\forall x \in [a,b]$ için

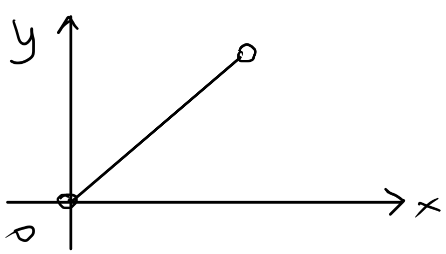
$$\underbrace{f(p)}_{\text{min.}} \le f(x) \le \underbrace{f(q)}_{\text{max.}}$$

olacak şekilde $p, q \in [a,b]$ noktaları vardır.



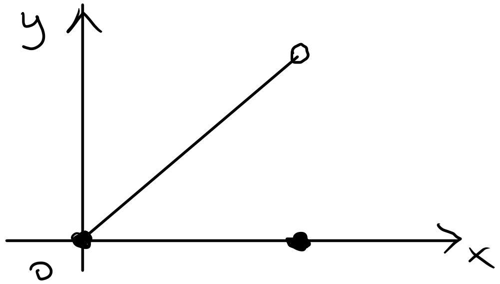
$D(f): (0,1)$

Tanım kümesi açık aralık olduğundan max ve min dan söz edilemez.
(sınırlı değil)



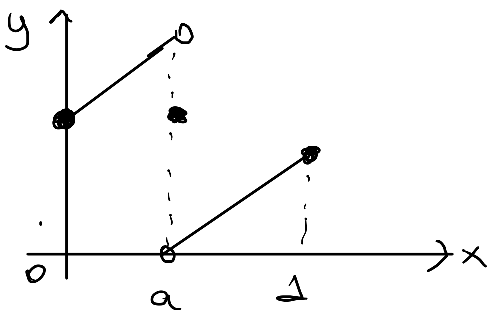
$D(f): (0,1)$

Tanım kümesi açık aralık olduğundan max ve min dan söz edilemez.
(sınırlı)



$D(f): [0,1]$

f fonksiyonu $x=1$'de süreksiz olduğundan bir max değere sahip değildir. Ancak min. değeri vardır. (sınırlı)



$D(f): [0,1]$

f fonksiyonu tanım aralığının bir iç noktasında süreksizdir. (sınırlıdır) Fakat max. min değeri yoktur.

Teorem (Aradeğer teoremi)

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve s $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir sayı ise o zaman $f(c)=s$ olacak şekilde $c\in[a,b]$ sayısı vardır.

Ör/ $f(x)=x^3-4x$ 'in pozitif ve negatif olduğu aralıkları belirleyiniz.

$f(x)=0 \Rightarrow x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2,\ x=-2$

$[-4,-2] \subset (-\infty,\infty)$

$$\left.\begin{aligned} f(-3) &= -27+12=-15 \\ f(-4) &= -64+16=-48 \\ f(-2) &= -8+8=0 \end{aligned}\right\} -$$

$[-2,-1] \subset (-\infty,\infty)$

$f(-2)=0$

$f(-1)=-1+4=3$

$f(-\frac{3}{2})=-\frac{27}{8}+6$

$=\frac{21}{8}$ $+$

$[0,2] \subset (-\infty,\infty)$

$f(0)=0$

$f(1)=1-4=-3$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-2=-\frac{15}{8}$ $-$

$[2,4] \subset (-\infty,\infty)$

$f(2)=8-8=0$

$f(4)=64-16=48$

$f(3)=27-12=15$ $+$

Ör/ $x^3-x-1=0$ denkleminin $[1,2]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz.

$D(f): \mathbb{R}$

$[1,2] \subset \mathbb{R}$

$f(1)=1-1-1=-1$

$f(2)=8-2-1=5$

$f(1)<0$, $f(2)>0$ olduğundan ara değer teoremine göre $f(c)=0$ olacak şekilde $c \in [1,2]$ noktası vardır.

Sabit Nokta Teoremi

f'in $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve her $x \in [0,1]$ için $0 \leq f(x) \leq 1$ olduğunu kabul edelim. $[0,1]$ aralığında $f(c)=c$ olacak şekilde bir c sayısının var olduğunu gösteriniz.

$f(0)=0$ ve $f(1)=1$ ise yapacak bir şey yoktur.

$f(0)\neq 0$ ve $f(1)\neq 1$ olduğunu kabul edelim.

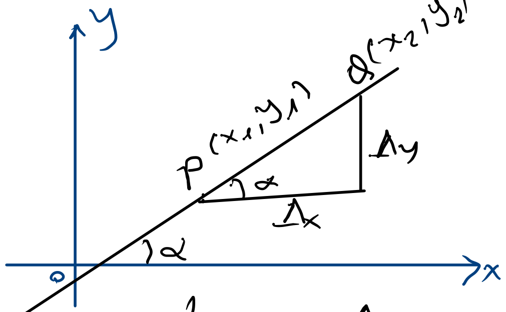
$g(x)=f(x)-x$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=f(0)-0\geq 0 \\ g(1)=f(1)-1\leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Ara değer teo. göre $g(c)=0$ o.ş. bir $c\in[0,1]$ vardır.

$$g(c)=f(c)-c=0$$
$$f(c)=c$$

Türev

Teğet doğruları ve eğimleri

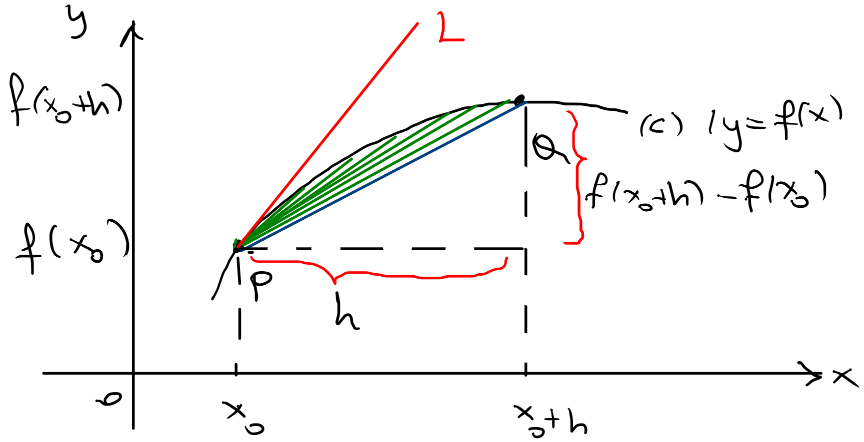


$$\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$ Dik olmayan bir doğrunun eğimi
$$=\tan\alpha$$

Sonuç: 1°) iki doğrunun birbirine paralel olması için g.y.k eğimlerinin birbirine eşit olmasıdır.

2°) iki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı -1'dir.



Bir c eğrisi ve bu eğrinin bir P noktasından geçen L doğrusu verilmiş olsun. C eğrisi üzerinden P'den farklı fakat giderek P'ye yaklaşan Q noktalarını alalım. Eğer L doğrusunun eğimi, Q noktası P ye yaklaşırken, bu PQ doğrularının eğimleri ise o zaman L doğrusu P'de eğriye teğettir.

PQ doğrusunun eğimi;

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{-[f(x_0)-f(x_0+h)]}{h}$$ (Newton bölümü ya da fark bölümü)

Dik olmayan teğet doğruları

f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ve $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m$ limitinin mevcut olduğunu kabul edelim. O zaman m eğimine sahip olan ve $P(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen doğruya $y=f(x)$ eğrisinin P'deki teğet doğrusu denir ve denklemi

$$y = m(x-x_0) + y_0$$

şeklindedir.

Ör/ $y=x^2$ eğrisine $(1,1)$ noktasında teğet olan doğrunun denk.'ni bulunuz.

$x_0 = 1 \qquad y_0 = 1$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2+h) = 2$$

$y = 2(x-1)+1$

$\boxed{y = 2x-1}$ Teğet doğ. denk.

Dikey Teğetler

f fonksiyonu $P(x_0, y_0) = P(x_0, f(x_0))$ noktasında sürekli ve

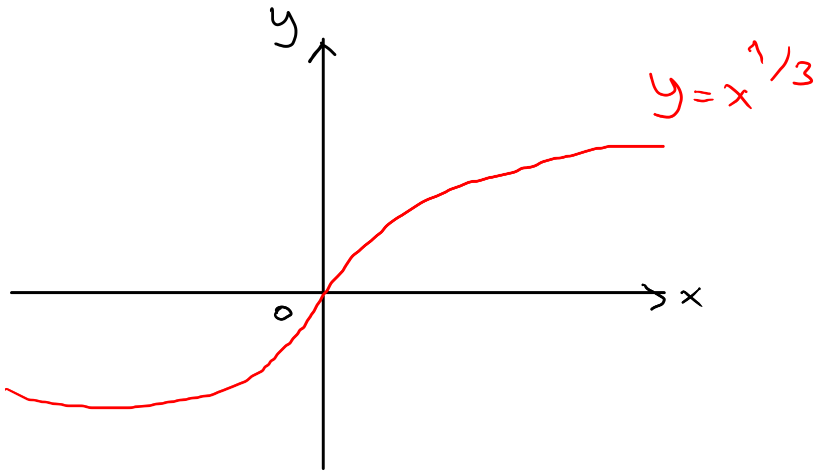
ya $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$

ya da $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$

ise o zaman $x = x_0$ dikey doğrusu P'de fonksiyonun grafiğine teğettir. Eğer Newton bölümünün limiti ∞ veya $-\infty$ hariç mevcut değilse fonksiyon P'de teğete sahip olmaz.

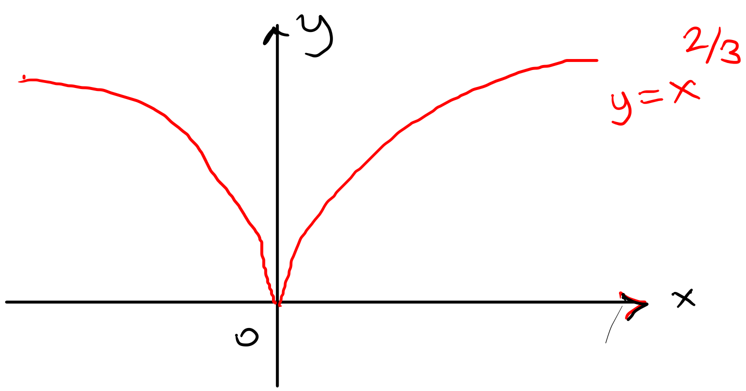
Örnekler

1) $f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonunun orjindeki teğet doğrusu y-eksenidir.



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}=\infty$$

2) $f(x)=x^{2/3}$ fonksiyonu orjinde herhangi bir teğete sahip değildir.



$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^{2/3}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^{1/3}}=-\infty$$

$$\left(\lim_{h\to 0^-}\frac{h^{2/3}}{h}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(0-\varepsilon)^{2/3}}{(0-\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{2/3}}{-\varepsilon}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{1/3}}=-\infty\right)$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{2/3}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{1/3}} = \infty$$

$$\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(0+\varepsilon)^{2/3}}{0+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{2/3}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^{1/3}} = \infty\right)$$

(sağ, sol limitler farklı olduğundan ve mevcut olmadığından tepete sahip değildir)

3) $y=|x|$ fonksiyonu $x=0$'da tepete sahip midir?

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} &= 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} &= -1 \end{aligned}\right] \neq$$

olduğundan Newton bölümünün limiti mevcut değildir. Fonksiyon $x=0$'da tepete sahip değildir.

Bir eğrinin eğimi:

Bir c eğrisinin bir P noktasındaki eğimi, P noktasında eğriye teğet olan doğrunun eğimidir.

Ör/ $y = \dfrac{x}{3x+2}$ eğrisinin $x=-2$ noktasındaki eğimini bulunuz.

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-2+h}{3(-2+h)+2} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-2+h}{-4+3h} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4+2h-(-4+3h)}{2h(-4+3h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{2\cancel{h}(-4+3h)} = \frac{1}{8}$$

Normal Doğrusu

Eğer bir C eğrisinin bir P noktasındaki teğeti L ise P'den geçen ve L'ye dik olan N doğrusuna eğrinin P'deki normal doğrusu denir.

L yatay ⇒ N dikey

L dikey ⇒ N yatay

L dikey veya yatay değilse $\underbrace{N}_{\text{Normal}}$'in eğimi $= \dfrac{-1}{\underbrace{L}_{\text{Teğet}}\text{'nin eğimi}}$

Ör/ $y=x^2$ 'nin $(1,1)$ noktasındaki normalinin eğimini ve normal doğrusunun denklemini bulunuz.

Teğetin eğimini 2 bulmuştuk.

$\Rightarrow$ Normalin eğimi $= \frac{-1}{2}$

Normal doğrusunun denklemi : $y = \frac{-1}{m}(x-x_0)+y_0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-1)+1$

$$\boxed{2y+x=2}$$

Türevin tanımı

Bir fonksiyonun türevi mevcut olması koşuluyla

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = Df = Dy \quad \left(\frac{d}{dx} = D \text{ denirse} \right)$$

limiti ile tanımlanan başka bir f' fonksiyonudur.

Buna göre bir f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi fonksiyonun x_0 noktasındaki teğetinin eğimidir.

Teğet doğ. denk : $y = f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ / Normal doğ. denk : $y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

- $D(f')$, $D(f)$'den küçüktür veya $D(f)$'e eşittir.
- fonksiyonun diferansiyellenebilir (türevlenebilir) olmadığı ve $D(f)$'in uç noktası olmayan x değerlerine f'in tekil noktaları denir.
- $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\left(\begin{array}{l} x_0+h = x \\ h = x-x_0 \end{array} \right)$$
$h\to 0$
$x\to x_0$

- (Sağ- sol türev)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+(x) \to \text{sağ türev}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x) \to \text{sol türev}$$

- $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x)$ mevcut ve $f'_+(a)$ ile $f'_-(b)$'nin her ikisi de mevcut ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde türevlenebilirdir denir.

Ör/

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq 0 \\ x^2+2x+7 & x<0 \end{cases}$$ fonksiyonu $x=0$'da türevlenebilir midir?

$f(0)=-1$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[(0+h)^2+2(0+h)+7]-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h+7+1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h+8}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{h}\left(h+2+\frac{8}{h}\right)}{\cancel{h}}=-\infty$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[2(0+h)-1]-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=2$$

TÜREV TANIMIYLA İLGİLİ ÖRNEKLER

1) $f(x) = ax+b$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[a(x+h)+b]-(ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a$$

2) $f(x) = c$ $\quad (c \to \text{sbt})$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

3) $f(x) = x^2$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h.x.(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}.x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

5) $f(x)=\sqrt{x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\left[\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right]\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\binom{p}{q}=\frac{p!}{(p-q)!\cdot q!}$$

6) $f(x)=x^n \quad n\in\mathbb{N} \qquad (n\in\mathbb{R})$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\binom{n}{0}x^n h^0+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\dots+\binom{n}{n}x^0 h^n\right]-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}\cdot h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot h^2+\dots+h^n-\cancel{x^n}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\dots+h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}=nx^{n-1}$$

NOT: Bir türev fonksiyonunun sürekli olması gerekmemesine karşın sürekli fonksiyonlar gibi türev fonksiyonu da aradeğer özelliğine sahiptir.

Teorem: f fonksiyonu $x=a$ noktasında türeve sahip ise bu noktada süreklidir. (Teoremin tersi her zaman doğru değildir. Ör/ $f(x)=|x|$ $x=0$'da süreklidir ama türevi yoktur)

TÜREV KURALLARI

f ve g fonksiyonları x'de türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar

1) $(f \mp g)'(x) = f'(x) \mp g'(x)$

2) $(c.f)'(x) = c.f'(x)$ $\quad (c \in \mathbb{R})$

3) $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

$$\left\{ (f_1 . f_2 . f_3 \cdots f_n)'(x) = f_1'(x).f_2(x).f_3(x)\cdots f_n(x) + f_1(x).f_2'(x)f_3(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x) \right\}$$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$

Örnekler

1) $f(x) = 5\sqrt{x} + \frac{3}{x} - 18 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$

2) $y = \frac{t^4}{7} - 3t^{7/3} \Rightarrow y' = \frac{1}{7} \cdot (4t^3) - 3 \cdot \left(\frac{7}{3} t^{\frac{7}{3}-1}\right) = \frac{4}{7} t^3 - 7\, t^{4/3}$

3) $y = \frac{3x^3 - 4}{x}$ eğrisine $(-2, y)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

$x = -2 \Rightarrow y = \frac{-8-4}{-2} = \frac{-28}{-2} = 14$

$y' = \frac{9x^2 \cdot x - 1 \cdot (3x^3 - 4)}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{6x^3 + 4}{x^2}$

$y'\Big|_{x=-2} = \frac{6 \cdot (-8) + 4}{4} = \frac{-44}{4} = -11$ $\Rightarrow$ Teğet doğ. denk $= -11 \cdot (x+2) + 14 = -11x - 8$

4) $y = u.v$, $u(2) = 2$, $u'(2) = -5$, $v(2) = -1$, $v'(2) = 3 \Rightarrow y'(2) = ?$

$y' = u'v + v'u$

$y'\Big|_{x=2} = (-5).(-1) + 3.2 = 5 + 6 = 11$

5) $(-1,0)$ noktasından geçen ve $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ doğrusuna teğet olan doğrunun denk. bulunuz.

$x = a$, $y = \dfrac{a-1}{a+1}$

$y' = \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$y'\Big|_{x=a} = \dfrac{2}{(a+1)^2} = m$

$(-1,0)$ $\left(a, \dfrac{a-1}{a+1}\right)$

$m = \dfrac{\dfrac{a-1}{a+1} - 0}{a-(-1)} = \dfrac{a-1}{(a+1)^2}$

$\dfrac{2}{(a+1)^2} = \dfrac{a-1}{(a+1)^2} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow m = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$

$y = \frac{1}{8}(x-3) + \frac{1}{2} \Rightarrow 8y - x = 1$

Zincir Kuralı

$$(f\circ g)'(x) = \{f[g(x)]\}' = g'(x) \cdot f'[g(x)]$$

Ör/ $y = \sqrt{x^2+1}$

$$\left.\begin{aligned} x^2+1 &= u \\ y &= \sqrt{u} \end{aligned}\right\} \quad y' = u' \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \cancel{2}x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ör/ $y = \left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{1/4} \Rightarrow y' = \left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)' \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}$

$$= \left(3 + \frac{0 \cdot (2x+1)^3 - 2 \cdot 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 1}{(2x+1)^6}\right) \cdot \frac{1}{4}\left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}$$

$$= \left[3 + \frac{2x+1 - 6}{(2x+1)^4}\right] \cdot \frac{1}{4}\left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}$$

Ör/ $\frac{d}{dx}\left[f(\underbrace{\pi . f(x)}_{g(x)})\right] = \pi . f'(x)\, f'\left[\pi . f(x)\right]$

Ör/ $\frac{d}{dx}\left\{\left[f(3-2f(x))\right]^4\right\} = 4.\left[f(3-2f(x))\right]^3 . (-2f'(x)) . f'(3-2f(x))$

$= -8\left[f(3-2f(x))\right]^3 . f'(x) . f'(3-2f(x))$

$u=u(x)$ olmak üzere;

- $\frac{d}{dx}\left[u^n\right] = n.u'.u^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{u}\right] = \frac{-u'}{u^2}$
- $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{u}\right] = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $\frac{d}{dx}\left[|u|\right] = u'. \operatorname{sgn}(u) = u'. \frac{|u|}{u}$

Trigonometrik Fonksiyonların türevleri

$y = \sin x$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x . \cos h + \cos x . \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x . \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x . \left(-2 \sin^2 \frac{h}{2}\right) + \cos x . \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[- \sin x \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \sin \frac{h}{2} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right]$$

$$= \cos x$$

$y = \cos x \Rightarrow y' = - \sin x$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x . \cos x - (-\sin x) . \sin x}{(\cos x)^2} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y'=-(1+\cot^2 x)=-\csc^2 x$$

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x} \Rightarrow y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x.\sec x$$

$$y=\csc x=\frac{1}{\sin x} \Rightarrow y'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\cot x.\csc x$$

$u=u(x) \Rightarrow$

$$y=\sin u \Rightarrow y'=u'.\cos u$$

$$y=\cos u \Rightarrow y'=-u'.\sin u$$

$$y=\tan u \Rightarrow y'=u'(1+\tan^2 u)=u'.\sec^2 u$$

$$y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)=-u'\csc^2 u$$

$$y=\sec u \Rightarrow y'=u'.\tan u.\sec u$$

$$y=\csc u \Rightarrow y'=-u'.\cot u.\csc u$$

Örnekler

1) $y=\sin(\pi x)+\cos(3x) \Rightarrow y' = \pi \cdot \cos(\pi x) - 3.\sin(3x)$

2) $y = x^2 \sin\sqrt{x} \Rightarrow y' = 2x.\sin\sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x}$

3) $y = 3x + \cot\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow y' = 3 - \frac{1}{2}\left(1+\cot^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 3 - \frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)$

4) $y=\tan\frac{\pi x}{4}$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.

$x=1 \Rightarrow y = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$y' = \frac{\pi}{4} \cdot \sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

$y'\Big|_{(1,1)} = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$

Teğet doğ. denk : $y = \frac{\pi}{2}(x-1) + 1$

Normal doğ. denk : $y = \frac{-2}{\pi}(x-1) + 1$

Yüksek Mertebeden Türevler

Eğer $y=f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $f'(x)$ x'de diferansiyellenebilir ise (yani Newton bölümünün limiti mevcut ise $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$) o zaman buna f'in 2. mertebeden türevi denir.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=f''(x)=y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx^2}=D^2y=D^2f \qquad \left(D=\frac{d}{dx}\right)$$

$$f'''(x)=(f''(x))'=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=\frac{d^3f}{dx^3}=y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=D^3y=D^3f$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'=\frac{d^nf}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}=D^ny=D^nf$$