Uygulama

1) $(5x^3+By^3)\,dx+(2y-x^3)\,dy=0$ denkleminin tam dif. denklem olması için B ne olmalıdır?

a) $-\frac{x^2}{y^2}$ b) $\frac{3x^2}{y}$ c) $-xy$ d) $\frac{x^2}{y}$ e) x^2y

$$\frac{\partial}{\partial y}(5x^3+By^3)=\frac{\partial}{\partial x}(2y-x^3)$$

$$3By^2=-3x^2$$

$$B=-\frac{x^2}{y^2}$$

2) $4y'=3y+2x\sqrt{y}$ dif. denkleminin çözümünü bulmak için yapılan uygun dönüşüm ile denklemin yeni formu aşağıdakilerden hangisidir?

$y'+p(x)y=q(x)y^n \Rightarrow \frac{y'}{y^n}+p(x)\underbrace{\frac{1}{y^{n-1}}}_{\to z}=q(x)$

a) $z'-z=x$ b) $z'-z=4x$ c) $z'-\frac{3}{8}z=\frac{x}{4}$ d) $z'-\frac{3}{8}z=x$ e) $z'+z=\frac{x}{4}$

$$y'-\frac{3}{4}y=\frac{x\sqrt{y}}{2} \qquad \text{Bernoulli}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}}-\frac{3}{4}\sqrt{y}=\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{y}=z \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}}=z' \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}}=2z' \Rightarrow 2z'-\frac{3}{4}z=\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow z'-\frac{3}{8}z=\frac{x}{4}$$

3) $xy' = y - \ln\left(\frac{1}{y'}\right)$ diferansiyel denkleminin tekil çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = \ln x$ b) $y = \frac{1}{\ln x}$ c) $y = 1 + \ln x$ d) $y = \ln(1+x)$ e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$y = xy' + \varphi(y') \rightarrow$ Clairaut

$y = xy' + \ln\left(\frac{1}{y'}\right)$

$y' = p \Rightarrow y = xp + \ln\left(\frac{1}{p}\right)$

$\Rightarrow y' = p + xp' + \frac{-p'/p^2}{1/p}$

$\Rightarrow \cancel{p} = \cancel{p} + xp' - \frac{p'}{p}$

$\Rightarrow p'\left[x - \frac{1}{p}\right] = 0$

$\Rightarrow x - \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{p} \Rightarrow p = \frac{1}{x}$

$y = \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \ln(x)$

$\boxed{y = 1 + \ln x}$

4) $y^{(4)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$ dif. denklemi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) karakteristik denklemi çakışık (katlı) köke sahiptir.

~~b)~~ karakteristik denklem kompleks köke sahiptir.

~~c)~~ Genel çözümünde üç keyfi sbt bulunur.

~~d)~~ karakteristik denklemin reel kökü yoktur.

~~e)~~ karakteristik denklemin köklerinden biri 2 dir.

$(D^4 - D^3 - 3D^2 + 5D - 2)\, y = 0$

$L(r) = r^4 - r^3 - 3r^2 + 5r - 2 = 0$

$r^4 - r^3 - 3r^2 + 3r + 2r - 2 = 0$

$r\left[r^3 - r^2 - 3r + 3\right] + 2(r-1) = 0$

$r\left[r^2(r-1) - 3(r-1)\right] + 2(r-1)$

$(r-1)\left[r^3 - 3r + 2\right] = 0$

$(r-1)[r^3-3r+2]=0$

$(r-1)[r^3-r-2r+2]=0$

$(r-1)[r\underbrace{(r^2-1)}_{(r-1)(r+1)}-2(r-1)]=0$

$2-1$

$(r-1)^2[r^2+r-2]=0$

$(r-1)^2(r-1)(r+2)=0$

$r_{1,2,3}=1 \quad r_4=-2$

5) $y''+ay'+by=0$ denkleminin genel çözümü

$y=e^{2x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x) \longrightarrow r_{1,2}=2\mp 2i$

olduğuna göre $a+b=?$

$r=\alpha\mp i\beta \Rightarrow y=e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x]$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

$(r-2+2i)(r-2-2i)=r^2-2r-\cancel{2ri}-2r+4+\cancel{4i}+\cancel{2ir}-\cancel{4i}+4$

$=r^2-4r+8$

$y''-4y'+8y=0$

$a=-4,\ b=8 \Rightarrow a+b=4$

6) $2y''-y'=0$ diferansiyel denkleminin çözüm takımının Wronskian determinantı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ b) $e^{\frac{x}{2}}$ c) 0 d) $\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ e) $e^{-\frac{x}{2}}$

$2y''-y'=0$

$(2D^2-D)y=0$

K.D: $2r^2-r=0$

$r(2r-1)=0$

$r_1=0 \quad r_2=\frac{1}{2}$

$y_1=e^0=1$

$y_2=e^{\frac{x}{2}}$

$$W(1,e^{\frac{x}{2}})=\begin{vmatrix}1 & e^{\frac{x}{2}}\\ 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

7) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+y)^2}{x^2}$ dif. denklemine uygun bir dönüşüm uygulayarak elde edilen değişkenlerine ayrılabilir dif. denklem aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(1+u^2)\,dx - 2x^2 du = 0$

b) $(1+u+u^2)\,dx - x\,du = 0$

c) $(1+u)\,dx + 2x\,du = 0$

d) $(1+u^2)\,du - 2x\,dx = 0$

e) $(1+u^2)\,dx - 2x\,du = 0$

$\dfrac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = u'x + u$

$u'x + u = \dfrac{(\overbrace{x+ux}^{x(1+u)})^2}{x^2} \Rightarrow u'x + u = (1+u)^2$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dx}\cdot x = u^2 + 2u + 1 - u$

$\Rightarrow x\dfrac{du}{dx} = u^2 + u + 1$

$\Rightarrow (u^2+u+1)\,dx - x\,du = 0$

8) $y' + y^2 = \dfrac{2}{x^2}$ dif. denkleminin bir özel çözümünün $y_1 = \dfrac{A}{x}$ olduğu bilindiğine göre aşağıdakilerden hangisi A'nın en büyük değeri için elde edilecek Bernoulli dif. denklemidir?

$y_1' = \dfrac{-A}{x^2} \Rightarrow \dfrac{-A}{x^2} + \dfrac{A^2}{x^2} = \dfrac{2}{x^2} \Rightarrow A^2 - A = 2 \Rightarrow A^2 - A - 2 = 0$

$\boxed{A = 2}$

$A = -1$

$y_1 = \dfrac{2}{x}$ $\qquad y' = -y^2 + \dfrac{2}{x^2}$ Rikatti $\longrightarrow y = y_1 + u = \dfrac{2}{x} + u \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{x^2} + u'$

a) $u' + \dfrac{4u}{x} = -u^2$

b) $u' - x^2 u = -xu^2$

c) $u' - \dfrac{4}{x}u = u^2$

d) $u' + \dfrac{4u}{x} = u^2$

$y_1 = \frac{2}{x}$

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1 + u = \frac{2}{x} + u \\ y' &= \frac{-2}{x^2} + u' \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{x^2} + u' = -\left(\frac{2}{x} + u\right)^2 + \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{x^2} + u' = -\left[\frac{4}{x^2} + \frac{4u}{x} + u^2\right] + \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad u' = -\frac{4u}{x} - u^2 \Rightarrow u' + \frac{4u}{x} = -u^2$$

9) $(x+1)y' = y + e^x(x+1)^2$ dif. denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{y}{(x+1)^2} = e^x + c$ b) $\frac{y}{x+1} = e^x + c$ c) $\frac{y}{(x+1)^3} = e^{2x} + c$ d) $\frac{y}{x+1} = e^{2x} + c$ e) $\frac{y}{x+1} = e^{-2x} + c$

$$y' = \frac{y}{x+1} + e^x(x+1)$$

$$y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1) \quad \text{L.D.D.}$$

$$\boxed{y' + p(x)\,y = q(x)}$$

$$p(x) = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow \lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x+1}} = e^{-\ln|x+1|}$$

$$= \frac{1}{x+1}$$

$$y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$$

$$\frac{y'}{x+1} - \frac{y}{(x+1)^2} = e^x \Rightarrow \frac{dy}{x+1} - \frac{y\,dx}{(x+1)^2} = e^x\,dx$$

$$\underbrace{\frac{dy}{x+1} - \frac{y\,dx}{(x+1)^2}} = e^x\,dx$$

$$\int d\left(\frac{y}{x+1}\right) = \int e^x\,dx$$

$$\frac{y}{x+1} = e^x + c$$

10) $3ye^{2xy}dx - 4be^{2xy}dy = x\,dx$ dif. denkleminin tam dif. olması için b ne olmalıdır?

a) $\frac{-3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e) Hiçbiri

$$(3ye^{2xy} - x)\,dx - 4be^{2xy}dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(3ye^{2xy} - x) = \frac{\partial}{\partial x}(-4be^{2xy})$$

$$3e^{2xy} + 6xye^{2xy} = -8ybe^{2xy}$$

$$3 + 6xy = -8yb$$

11) $ay'' + by' + 3y = 0$ denkleminin bir çözümü $y = -2xe^{-3x}$ olduğuna göre, a+b aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

$$y = -2xe^{-3x}$$

$$y' = -2e^{-3x} + 6xe^{-3x} = (6x-2)e^{-3x}$$

$$y'' = 6e^{-3x} + 3(6x-2)e^{-3x}$$

$$y'' = (-18x+12)e^{-3x}$$

$$a(-18x+12)e^{-3x} + b(6x-2)e^{-3x} - 6xe^{-3x} = 0$$

$$x(-18a+6b-6) + (12a-2b) = 0$$

$$-18a + 6b = 6 \qquad 18a = 6$$

$$3/\ 12a - 2b = 0 \qquad a = 1/3 \quad b = 2 \Rightarrow a+b = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

12) $y'' + 2y' + 2y = 0$ dif denkleminin $y(0)=1$, $y'(0)=0$ koşullarına uygun çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

$$(D^2+2D+2)y=0 \Rightarrow k.D = L(r) = r^2+2r+2 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4-8}}{2} = -1 \mp i$$

$$y = e^{-x}\cdot(c_1\cos x + c_2\sin x) \qquad y(0)=1 \Rightarrow 1 = \underbrace{e^{0}}_{=1}(c_1\underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2\underbrace{\sin 0}_{0})$$

$$\Rightarrow c_1 = 1$$

$$y' = -e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-x}(-c_1\sin x + c_2\cos x)$$

$$y'(0)=0 \Rightarrow 0 = -\underbrace{e^{0}}_{=1}(c_1\underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2\underbrace{\sin 0}_{0}) + \underbrace{e^{0}}_{=1}(-c_1\underbrace{\sin 0}_{0} + c_2\underbrace{\cos 0}_{=1}) \Rightarrow -c_1 + c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = c_1$$

$$y = e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

13) $y=\frac{x}{x+1}$ çözümü aşağıdaki dif. denklemlerden hangisinin çözümü olabilir?

a) $xy'=y$ b) $yy'=x$ c) $y^2y'=x^2$ d) $x^2y'=y^2$ e) $y^2y'=x$

$$y=\frac{x}{x+1} \Rightarrow y'=\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$x^2y'=\frac{x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow x^2y'=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=y^2$$

14) $xy+y'=-y^3e^{\frac{x^2}{2}}$ dif. denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\ln\left[\frac{e^{x^2}-x}{y}\right]=c$ b) $\ln\left[\frac{y}{e^{x^2}+x}\right]=c$ c) $y=\frac{\mp 1}{\sqrt{xe^{\frac{x^2}{2}}-ce^{\frac{x^2}{2}}}}$ d) $\frac{1}{2}x^2-2xy=c$ e) $y=\sqrt{e^{-x^2}+cx^2}$

$$-\frac{y'}{y^3}-\frac{x}{y^2}=e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{1}{y^2}=z \Rightarrow \frac{-y'}{y^3}=z'$$

$$z'-zx=e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{L.D.D.}$$

$$\lambda=e^{\int p(x)dx}=e^{\int -x\,dx}=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}z'-z.e^{-\frac{x^2}{2}}x=1 \Rightarrow \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}dz-ze^{-\frac{x^2}{2}}x\,dx}=dx$$

$$\int d\left(z.e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\int dx \Rightarrow z.e^{-\frac{x^2}{2}}=x+c$$

$$z \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x + C \Rightarrow z = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} = x e^{\frac{x^2}{2}} + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \frac{\mp 1}{\sqrt{x e^{\frac{x^2}{2}} + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}}$$