KOMPLEKS SAYILAR.

Tanım 27.

a ve b reel sayılar olmak üzere her $z=(a,b)=a+bi$ çiftine kompleks sayı adı verilir. a'ya söz konusu $z=a+bi$ kompleks sayısının reel kısmı, b ye de sanal kısmı denir ve $a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$ şeklinde gösterilir.

Tanım 28.

$z_1=a_1+b_1 i$ ve $z_2=a_2+b_2 i$ kompleks sayıları verilsin.

a) $z_1=z_2 \Longleftrightarrow a_1=a_2$ ve $b_1=b_2$;

b) $z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$

$$z_1 . z_2=(a_1 a_2-b_1 b_2)+i(a_1 b_2+a_2 b_1)$$

dir;

c) $z_1+z=z_2$ denklemini sağlayan z kompleks sayısına z_2 ve z_1 kompleks sayılarının farkı denir ve

$$z=z_2-z_1=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)i$$

olduğu açıktır.

d) $z_2\neq 0$ olmak üzere $z_2 . z=z_1$ denklemini sağlayan z kompleks sayısına z_1 ve z_2 kompleks sayılarının oranı (bölümü) denir ve

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a^2+b^2}+i\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a^2+b^2}\right)$$

dir.

$z=(0,1)$ kompleks sayısı $i=(0,1)$ sembolü ile gösterilir. O zaman

$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$ veya $i^2=-1$ olduğu görülür.

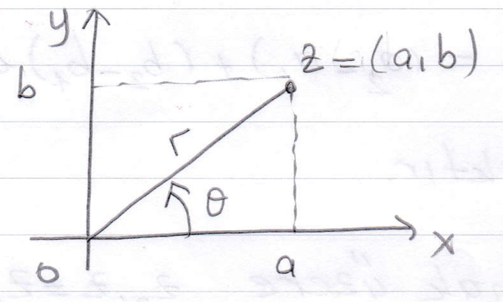
$z=a+ib$ yazılışına kompleks sayının cebirsel gösterimi denir.

$\bar{z}=a-ib=(a,-b)$ kompleks sayısına

$z=(a,b)=a+ib$ kompleks sayısının eşleniği (veya konjügesi) denir.

Her $z=a+ib$ kompleks sayısı düzlemin koordinatları a ve b olan bir noktası ile özdeşleştirilebilir.

Noktaları kompleks sayılara karşılık getiren düzleme kompleks düzlem adı verilir. ox-eksenine reel, oy-eksenine imajiner eksen adı verilir. $z=(a,b)$ noktasının $O=(0,0)$ başlangıç noktasına olan uzaklığına kompleks sayının mutlak değeri (veya modülü) denir ve $|z|$ ile gösterilir. $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$ olduğu açıktır.



$z=(a,b)$ noktasını $O=(0,0)$ başlangıç noktasına bağlayan yarıçap vektörünün θ'lık görüntü açısına z kompleks sayısının argümanı (veya açısı) denir, $\arg z=\theta$ ile gösterilir.

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a>0 \text{ ise} \\ \arctan \frac{b}{a}+\pi, & a<0,\ b\geq 0 \text{ ise} \\ \arctan \frac{b}{a}-\pi, & a<0,\ b<0 \text{ ise} \\ \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\, b, & a=0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu açıktır. $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ve θ sayılarına $z=(a,b)$ kompleks sayısının kutupsal (polar) koordinatları denir. Kutupsal koordinatlarda ikinci koordinat, birbirinden farklı 2π'nin herhangi bir katı olan sonsuz sayıda değerler alabilir. Bütün bu değerlerden $-\pi<\theta<\pi$ koşulunu sağlayan değere esas değer denir. Bu durumda $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ şeklinde yazılır.

r ve θ sayıları $z=(a,b)$ kompleks sayısının kutupsal koordinatları olduğunda

$$z=(a,b)=(r\cos\theta, r\sin\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ifadesine $z=(a,b)$ kompleks sayısının trigonometrik gösterimi veya formu denir. z kompleks sayısının kartezyen ve kutupsal gösterim çiftleri arasında şu bağıntılar vardır:

$$a=r\cos\theta; \qquad r=\sqrt{a^2+b^2};$$
$$b=r\sin\theta; \qquad \cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r}$$

$$z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

Eğer, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ise,

$$z_1 . z_2 = r_1 . r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

dir.

$$z_1 . z_2 . \cdots . z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)]$$

$n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow z^n = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta], \quad n=0,1,2,\ldots$$

Bu son formülde $r=1$ yazılırsa, de Moivre formülü olarak bilinen

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n=0,1,\ldots$$

bağıntısı elde edilir.

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n\arg z, \quad n=0,1,\ldots$$

dir. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ kompleks sayısının n. dereceden kökleri

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right], (k=0,1,\ldots,n-1)$$

formülü ile bulunur.

Kompleks sayılar kümesini $\mathbb{C}$ ile göstereceğiz.

Çözümlü Problemler.

1) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

a) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; b) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm. $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

a) $$\overline{z_1+z_2} = \overline{[(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)]}$$
$$= \overline{[(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)]}$$
$$= (a_1+a_2) - i(b_1+b_2)$$
$$= (a_1-ib_1)+(a_2-ib_2)$$
$$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

b) $z = a+ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

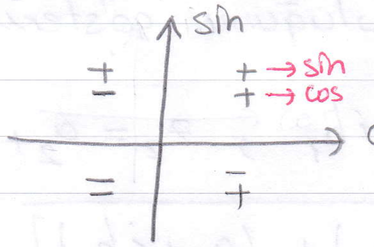
$$\bar{z} = a - ib = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$
$$= r[\cos\theta - i\sin\theta]$$

$$(\bar{z})^n = r^n[\cos n\theta - i\sin n\theta]$$
$$= r^n \overline{[\cos n\theta + i\sin n\theta]}$$
$$= \overline{z^n}$$

2) Aşağıdaki kompleks sayıları trigonometrik formda yazınız.

a) $z=-5$ b) $z=-3i$ c) $z=-\sqrt{3}+i$

Çözüm: a) $r=|z|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$, $\tan\theta=\frac{0}{-5}=0$ ($0 \rightarrow \sin\theta$, $-5 \rightarrow \cos\theta$)



$\Rightarrow \theta=\pi$

$\Rightarrow z=-5=5(\cos\pi+i\sin\pi)$

b) $r=|z|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$

$\tan\theta=\frac{-3}{0}=-\infty \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=3\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

c) $r=|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$\tan\theta=\frac{1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow z=2\left[\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$

3) $z=\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3}+i)}{i-1}$ kompleks sayısını trigonometrik formda yazınız.

Çözüm.

$$\sqrt{3}+i \quad \text{için} \quad r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$-1+i \quad \text{için} \quad r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z=\frac{\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]2.\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow z=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{11\pi}{12}-i\sin\frac{11\pi}{12}\right]$$

4) $z=\sqrt[3]{8i}$ nin köklerini bulunuz.

Çözüm: $z=\sqrt[3]{8i} \Rightarrow z^3=8i$

$$z^3=8i=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z=\sqrt[3]{8i}=8^{1/3}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right]$$

$k=0,1,2$

$$\Rightarrow z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

ELEMENTER FONKSİYONLAR -

X ve Y boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere X den Y'ye tanımlı fonksiyonların (dönüşümlerin) tanımını ve bazı özelliklerini daha önce kısaca gördük. Burada reel değişkenli ve reel değerli (yani $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $Y \subseteq \mathbb{R}$ durumunda) en çok kullanılan fonksiyonları tanımlayacak ve özelliklerini vereceğiz.

Tanım 29.

$X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f, g : X \to Y$ fonksiyonları verilsin. Bu iki fonksiyonun $f+g$ toplamı, $f-g$ farkı, $f.g$ çarpımı ve $\frac{f}{g}$ bölümü

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f \mp g$, $f.g$ fonksiyonları f ve g fonksiyonlarının tanımlı olduğu tüm noktalarda, f/g fonksiyonu da $g(x)=0$ denklemini sağlayan x ler hariç diğer tüm noktalarda tanımlıdır.

$f: X \to Y$ fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasındaki değeri $f(x_0)$ veya $f(x)|_{x_0}$ ile gösterilir.

Örneğin; $f(x) = \sqrt{x-1}$ ve $g(x) = \sqrt{5-x}$

fonksiyonları için

Fonksiyon	Tanım kümesi
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$D(f) = [1, \infty)$
$g(x) = \sqrt{5-x}$	$D(g) = (-\infty, 5]$
$f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$	$D(f+g) = [1, 5]$
$f(x) . g(x) = \sqrt{x-1} . \sqrt{5-x}$	$D(f.g) = [1, 5]$
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5-x}}$	$D(\frac{f}{g}) = [1, 5)$

$f(1) = g(5) = 0$, $f(2) = 1$, $g(2) = \sqrt{3}$

$f(3) = g(3) = \sqrt{2}$, $f(5) = g(1) = 2$

$(f+g)(1) = 2$, $(f+g)(2) = 1 + \sqrt{3}$, ...

bulunur.

Tanım 30: $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer, $\forall x \in X$ için $x + T \in X$ ve $f(x+T) = f(x)$ olacak şekilde bir $T > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına da f'nin bir periyodu denir. Eğer, varsa periyodların en küçüğüne fonksiyonun esas periyodu denir.

Tanım 31. $X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 < x_2$ iken

$f(x_1) < f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna artan;

$f(x_1) \leq f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna azalmayan;

$f(x_1) > f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna azalan;

$f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna artmayan

fonksiyon denir.

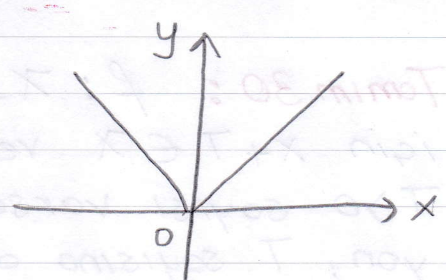
Eğer, bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise, fonksiyona kesin olarak monotondur, artmayan veya azalmayan ise monotondur denir. Eğer, bir fonksiyonun tanımlı olduğu her aralık, fonksiyonun monoton olduğu, sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa bu fonksiyona parçalı monoton fonksiyon denir.

Tanım 32.

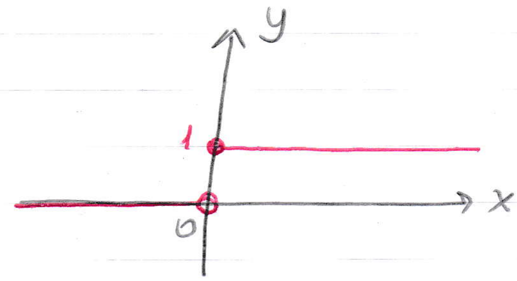
Tanım aralığının her bir alt aralığında ayrı bir fonksiyon ile tanımlanan bir fonksiyona parçalı fonksiyon denir.

Örneğin; mutlak değer fonksiyonu, Heaviside fonksiyonu, işaret fonksiyonu en genel örnekler olarak verilebilir.

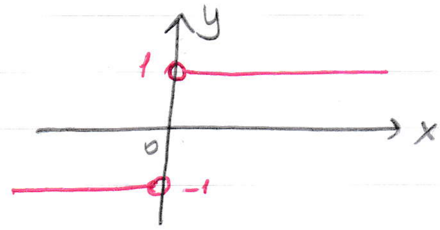
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ ise} \\ -x & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$



$$H(x) = \begin{cases} 1 , & x \geq 0 \text{ ise} ; \\ 0 , & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$



$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 , & x > 0 \text{ ise;} \\ -1 , & x < 0 \text{ ise;} \\ \text{Tanımsız}, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$



Tanım 33: Eğer, $X \subset \mathbb{R}$ ve $\forall x \in X$ için $-x \in X$ ise X kümesine bir simetrik küme denir.

Simetrik bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için

$f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna çift fonksiyon,
$f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonuna tek fonksiyon

denir.

Tanım 34: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun $R(X)$ görüntü kümesi üstten (veya alttan) sınırlı ise, f fonksiyonuna X üzerinde üstten (veya alttan) sınırlıdır denir. Başka bir ifade ile, eğer $\forall x \in X$ için $f(x) \leq M$ (veya $f(x) \geq m$) olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ (veya $m \in \mathbb{R}$) sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde üstten (veya alttan) sınırlıdır denir.

Eğer f fonksiyonu X üzerinde hem üstten hem de alttan sınırlı ise f fonksiyonuna X üzerinde sınırlıdır denir.

Tanım 35: Eğer, x ile $y=f(x)$ arasındaki bağıntı $F(x,y)=0$ biçimindeki bir bağıntı ile verilirse f fonksiyonuna kapalı olarak verilmiş fonksiyon veya kısaca bir kapalı fonksiyon denir.

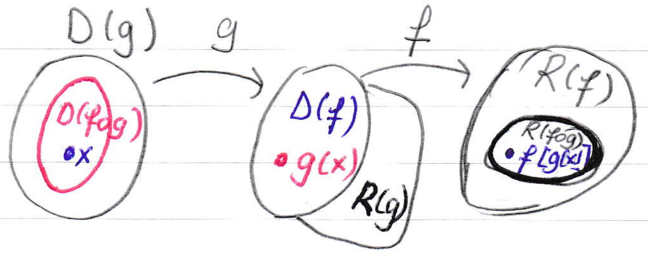
Tanım 36: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$ için koordinat düzleminin $(x, f(x))$ noktalar kümesine $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği denir.

Tanım 37: $y=c$ - sabit, $y=x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ - kuvvet, $y=a^{x}$, $a>0$, $a \neq 1$ üstel (üslü), $y=\log_a x$, $a>0, a\neq 1$ logaritma, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$ trigonometrik, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$ ters trigonometrik fonksiyonlara esas (temel) elemanter fonksiyonlar adı verilir.

Tanım 38: $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ iki fonksiyon ($X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, $Z \subset \mathbb{R}$) ise, o zaman fog bileşke fonksiyonu

$$(fog)(x) = f[g(x)]$$

olarak tanımlanır. $D(fog)$, $g(x) \in D(f)$ olacak şekilde g'nin tanım kümesindeki x sayılarından oluşur.



g'nin değer kümesinin f'in tanım kümesinin içinde olması durumunda fog'nin tanım kümesi g'nin tanım kümesiyle aynıdır.

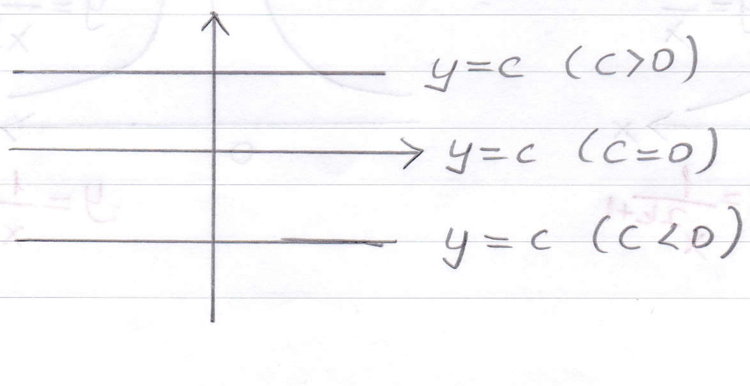
Örneğin; $f(x)=\sqrt{x}$ ve $g(x)=x+1$ verildiğinde $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$, $(f\circ f)(x)$ ve $(g\circ g)(x)$ bileşke fonksiyonları ve tanım kümeleri aşağıdaki gibidir.

Bileşke Fonksiyon	Tanım Kümesi
$(f\circ g)(x)=\sqrt{x+1}$	$[-1,\infty)$
$(g\circ f)(x)=\sqrt{x}+1$	$[0,\infty)$
$(f\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{x}}$	$[0,\infty)$
$(g\circ g)(x)=x+2$	$\mathbb{R}$

Tanım 39: Esas elementer fonksiyonlardan sonlu sayıda aritmetik işlem ve bileşik fonksiyon oluşturma kurallarının uygulanması ile elde edilip, $y=f(x)$ eşitliği ile ifade edilebilen her f fonksiyonuna elementer fonksiyon denir.

Sabit Fonksiyon

$c\in\mathbb{R}$ sabit bir sayı olmak üzere $\forall x\in\mathbb{R}$ için $y=f(x)=c$ şeklinde tanımlanan fonksiyona bir sabit fonksiyon denir. $D(c)=\mathbb{R}$ $R(c)=c$ dir.

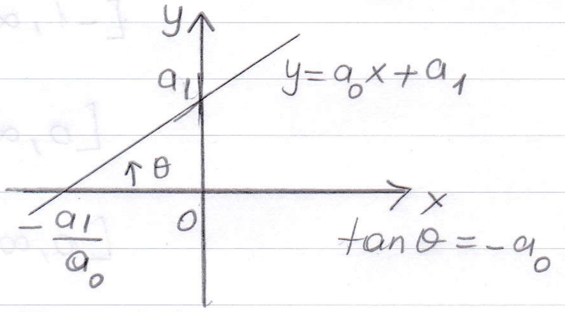


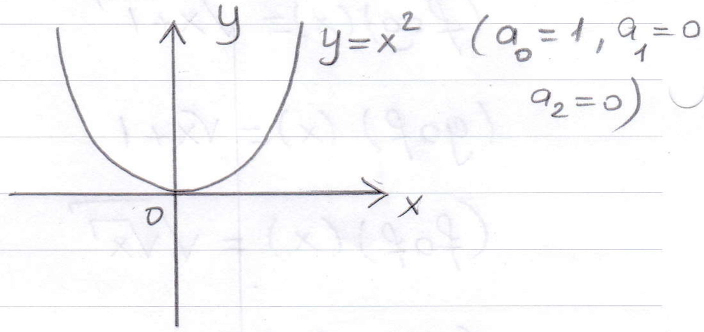
• Tam Rasyonel Fonksiyon.

$n \geq 0$ keyfi tam sayı ve $a_0, a_1, \dots, a_n$, $(a_0 \neq 0)$ keyfi reel sayılar olmak üzere n. dereceden

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

şeklindeki polinoma tam rasyonel fonksiyon denir. Tanımdan da görüldüğü gibi $D(P_n) = \mathbb{R}$'dir.



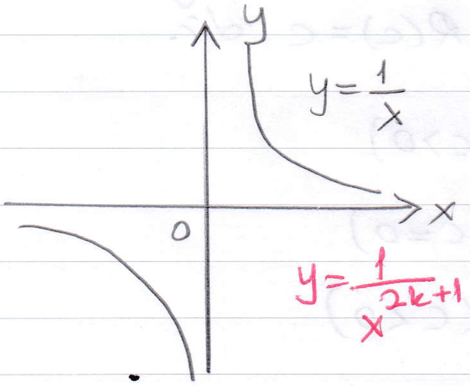


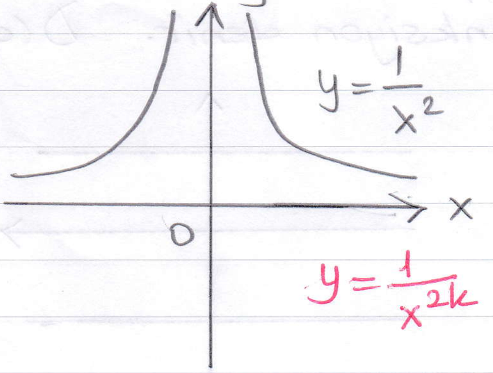
• Rasyonel (Kesir- rasyonel) Fonksiyon

$P_n(x)$ ve $Q_m(x)$ herhangi iki polinom olmak üzere $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona bir rasyonel (kesir- rasyonel) fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyonun tanım bölgesi

$$D\left(\frac{P_n}{Q_m}\right) = \{x \in \mathbb{R} : Q_m(x) \neq 0\}$$

dır.

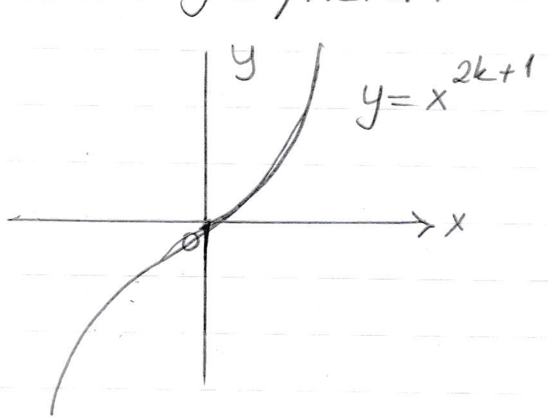


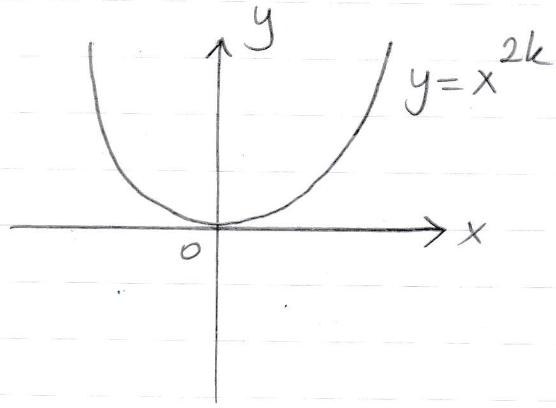


- Kuvvet Fonksiyonu

α herhangi bir reel sayı olmak üzere $y=x^{\alpha}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona kuvvet fonksiyonu adı verilir.

n bir doğal sayı olsun. Bu durumda $y=x^n$ fonksiyonu n. dereceden bir polinomun özel halidir. n sayısının tek ve çift olması durumunda $y=x^n$ fonksiyonunun grafikleri





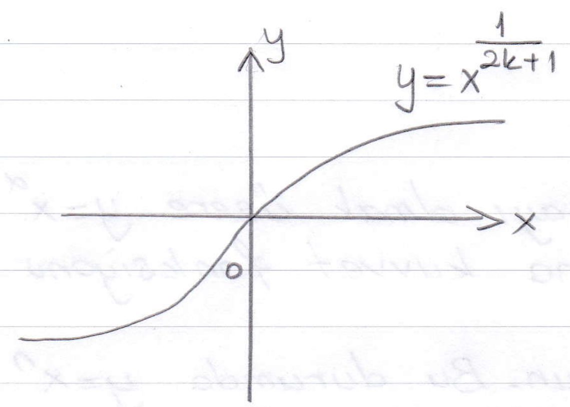
şeklinde olacaktır. Tüm $x\in\mathbb{R}$ için tanımlıdırlar.

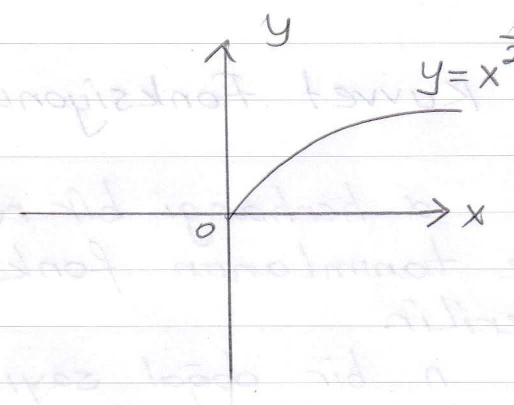
n doğal sayı olmak üzere $y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ fonksiyonu ise bir rasyonel fonksiyondur. Yine n'in çift veya tek olması durumunda $y=x^{-n}$'in grafikleri rasyonel fonksiyonlarda verdiğimiz grafiklere benzer. $x=0$ dışındaki tüm $x\in\mathbb{R}$ için tanımlıdırlar.

n doğal sayı olduğunda $y=\sqrt[n]{x}$ fonksiyonunun tanım bölgesi

$$D(\sqrt[n]{x})=\begin{cases}\mathbb{R} & ; \ n \text{ tek ise}\\ [0,\infty) & ; \ n \text{ çift ise.}\end{cases}$$

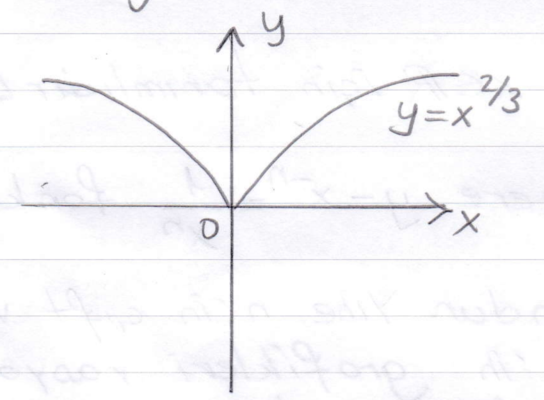
Bu durumda $y=\sqrt[n]{x}$ fonksiyonunun grafiği;

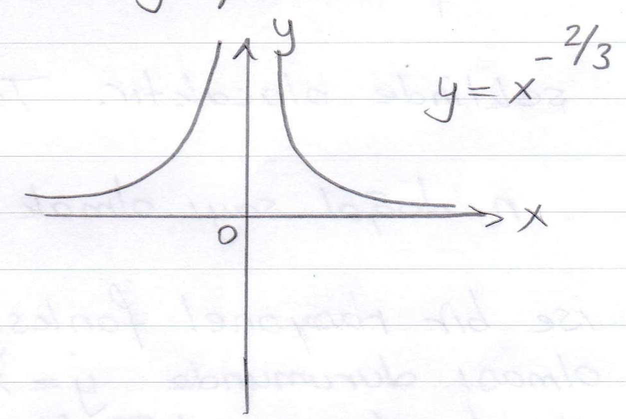




şeklindedir.

p ve $q\neq 0$ herhangi iki tam sayılar olmak üzere $y=x^{p/q}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde tanımlıdır. Bu fonksiyon her p ve q tam sayıları için $(-\infty,0)$ üzerinde tanımlı değildir. Üstelik, eğer, bu fonksiyon $(-\infty,0)$ üzerinde tanımlı ise o ya çift ya da tek fonksiyondur. Örneğin, $y=x^{2/3}$ ve $y=x^{-2/3}$ fonksiyonlarını ele alırsak grafikleri





şeklindedir.

- Üstel ve Logaritmik fonksiyonlar

$a>0$, $a\neq 1$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

$f(x)=a^x$ şeklinde tanımlanan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna bir üstel fonksiyon denir.

$a>1$ için bu fonksiyon artan, $0<a<1$ için azalan bir fonksiyondur.

$a>1$

x	$-\infty$		0		∞
a^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

$0<a<1$

x	$-\infty$		0		∞
a^x	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	0

$a>0$, $a\neq 1$ ve $x>0$ olmak üzere $f(x)=\log_a x$

şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna Logaritmik fonksiyon adı verilir. Her $y\in\mathbb{R}_+$ ve

her $x\in\mathbb{R}$ için $y=a^{\log_a y}$ ve $\log_a a^x = x$ olduğundan

$y=a^x$ ve $x=\log_a y$ fonksiyonları karşılıklı ters fonksiyonlardır. Bu sebepten $y=\log_a x$ in grafiği $y=a^x$ in grafiğinin $y=x$ doğrusuna göre simetriğidir.

$y=\log_a x$ fonksiyonu da $a>1$ için artan,

$0<a<1$ için azalandır.

$a>1$

x	0		1		a		∞
$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

$0<a<1$

x	0		a		1		∞
$\log_a x$	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$a>0$ ve $a\neq 1$ olmak üzere $y=a^x$ ve $y=\log_a x$

fonksiyonlarının özellikleri :

1) $D(a^x)=\mathbb{R}$ $\quad R(a^x)=\mathbb{R}_+$;

2) $\forall x,t\in\mathbb{R}$ için $(a^x)^t=a^{xt}$, $a^x\cdot b^x=(a.b)^x$ $(b>0, b\neq 1)$,

$a^x\cdot a^t=a^{x+t}$;

3) $D(\log_a x)=\mathbb{R}_+$, $R(\log_a x)=\mathbb{R}$

4) $\forall x,t\in\mathbb{R}_+$ için

$$\log_a(x.t)=\log_a x+\log_a t$$

$$\log_a\left(\frac{x}{t}\right)=\log_a x-\log_a t$$

5) $\forall x\in\mathbb{R}_+$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$$

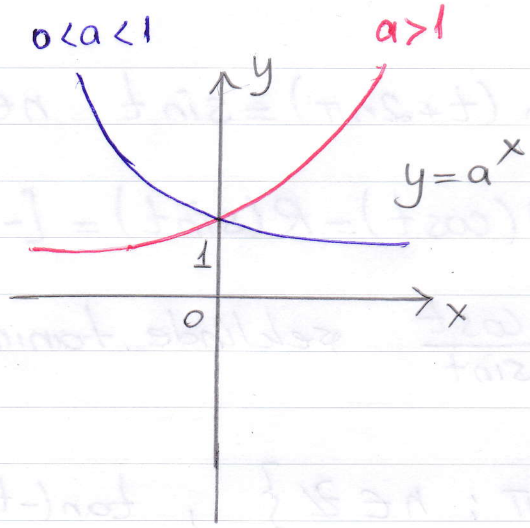
En çok kullanılan logaritma doğal logaritma adı verilen e tabanına göre yazılan Logaritmadır.

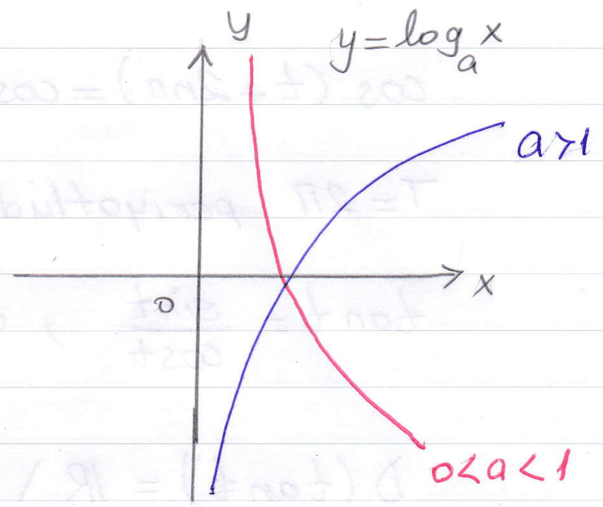
$\log_e x=\ln x \qquad y=\ln x\Leftrightarrow x=e^y$

$\log_{10} x=\log x \qquad y=\log x\Leftrightarrow x=10^y$

↓

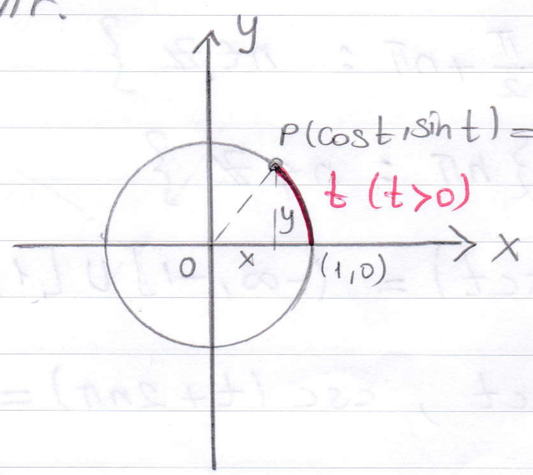
adi Logaritma





• Trigonometrik Fonksiyonlar

Merkezi orjinde ve yarıçapı 1 birim olan çember çizelim. (1,0) noktasından başlayarak çember üzerinde $|t|$ birim ilerleyelim. (Eğer, $t>0$ ise saat yönünün tersine, $t<0$ ise saat yönünde ilerlenecektir). Bu durumda çember üzerinde elde edilen bir P noktasının absisi $\cos t$, ordinatı $\sin t$ olarak tanımlanır. Böylece her $t\in\mathbb{R}$ sayısına bir $\cos t$ ve bir $\sin t$ sayısı karşılık gelir.



$D(\cos t)=D(\sin t)=\mathbb{R}$

$\cos(-t)=\cos t \quad , \quad \sin(-t)=-\sin t$

$\cos(t+2n\pi) = \cos t$, $\sin(t+2n\pi) = \sin t$ $n \in \mathbb{Z}$ 'dir.

$T = 2\pi$ periyotludur. $R(\cos t) = R(\sin t) = [-1,1]$

$\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ şeklinde tanımlıdır.

$D(\tan t) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(-t) = -\tan t$

$D(\cot t) = \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$, $\cot(-t) = -\cot t$

$R(\tan t) = R(\cot t) = \mathbb{R}$

$\tan(t+n\pi) = \tan t$, $\cot(t+n\pi) = \cot t$

$T = \pi$ periyotludurlar.

$\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$, $\csc t = \dfrac{1}{\sin t}$ şeklinde tanımlıdır.

$D(\sec t) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$

$D(\csc t) = \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$

$R(\sec t) = R(\csc t) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

$\sec(t+2n\pi) = \sec t$, $\csc(t+2n\pi) = \csc t$

$T = 2\pi$ periyotludurlar

$\sec(-t) = \sec t$, $\csc(-t) = -\csc t$