$$y'' + [\lambda - q(x)]y(x) = 0 \quad (4.1)$$
$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \quad (4.2)$$
$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \quad (4.3)$$

$$u(0,\lambda) = \sin\alpha, \quad u'(0,\lambda) = -\cos\alpha$$
$$v(\pi,\lambda) = \sin\beta, \quad v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$$

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{u(t)v(x)}{w(\lambda)} & 0 \le t \le x \\ \dfrac{u(x)v(t)}{w(\lambda)} & x \le t \le \pi \end{cases}$$

Teorem 4.4.: λ, (4.1)–(4.3) probleminin bir özdeğeri değil ve $f(x)$ $[0,\pi]$ de sürekli bir fonksiyon ise

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = f(x) \quad (4.10)$$

denkleminin (4.2) ve (4.3) sınır koşullarını sağlayan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$y(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t;\lambda) f(t)\,dt \quad (4.11)$$

şeklindedir.

$$\int_{a(x)}^{b(x)} I(x,\alpha)\,d\alpha$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} I(x,\alpha)\,d\alpha\right] = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial I}{\partial x}\,d\alpha + a'(x)\cdot I(x,a(x)) - b'(x)\,I(x,b(x))$$

İspat: i) $y(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t;\lambda) f(t)\,dt = \int_0^x G(x,t;\lambda) f(t)\,dt + \int_x^\pi G(x,t;\lambda) f(t)\,dt$

Bu çözümün denklemi sağladığını göstermeliyiz.

$$\boxed{y(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)} \int_0^x u(t,\lambda) v(x,\lambda) f(t)\,dt + \frac{1}{w(\lambda)} \int_x^\pi u(x,\lambda) v(t,\lambda) f(t)\,dt}$$

$$y'(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left[\int_0^x u(t,\lambda) v'(x,\lambda) f(t)\,dt + \cancel{u(x,\lambda) v(x,\lambda) f(x)}\right] + \frac{1}{w(\lambda)}\left[\int_x^\pi u'(x,\lambda) v(t,\lambda) f(t)\,dt - \cancel{u(x,\lambda) v(x,\lambda) f(x)}\right]$$

$$y'(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left[v'(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda) f(t)\,dt + u'(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda) f(t)\,dt\right]$$

$$y'(x,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left[v'(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)\,dt+u'(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda)f(t)\,dt\right]$$

$$y''(x,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left[v''(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)\,dt+v'(x,\lambda)\cdot u(x,\lambda)f(x)+u''(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda)f(t)\,dt-u'(x,\lambda)v(x,\lambda)f(x)\right]$$

$$=\frac{1}{w(\lambda)}\left[v''(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)\,dt+u''(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda)f(t)\,dt+f(x)\underbrace{\left[u(x,\lambda)v'(x,\lambda)-v(x,\lambda)u'(x,\lambda)\right]}_{w(\lambda)}\right]$$

$$\boxed{y''(x,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left[v''(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)\,dt+u''(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda)f(t)\,dt\right]+f(x)}$$

u ve v fonksiyonları (4.1)-(4.3) probleminin çözümleri olduğundan

$$u''(x,\lambda)+[\lambda-q(x)]u(x,\lambda)=0 \Rightarrow u''(x,\lambda)=[q(x)-\lambda]u(x,\lambda)$$

$$v''(x,\lambda)+[\lambda-q(x)\,v(x,\lambda)=0 \Rightarrow v''(x,\lambda)=[q(x)-\lambda)\,v(x,\lambda)$$

$$\Rightarrow y''(x,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left[(q(x)-\lambda)v(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)\,dt+(q(x)-\lambda)u(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda)f(t)\,dt\right]+f(x)$$

$$y''(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)} \left[(q(x)-\lambda)\, v(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda) f(t)\,dt + (q(x)-\lambda)\, u(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda) f(t)\,dt \right] + f(x)$$

$$= \frac{1}{w(\lambda)} \left\{ (q(x)-\lambda)\left[\int_0^x u(t,\lambda)\,v(x,\lambda)\, f(t)\,dt + \int_x^\pi v(t,\lambda)\,u(x,\lambda)\, f(t)\,dt \right]\right\} + f(x)$$

$$= [q(x)-\lambda]\cdot\left\{ \underbrace{\frac{1}{w(\lambda)}\left[\int_0^x u(t,\lambda)\,v(x,\lambda)\, f(t)\,dt + \int_x^\pi v(t,\lambda)\,u(x,\lambda)\, f(t)\,dt \right]}_{y(x,\lambda)} \right\} + f(x)$$

$$\Rightarrow y''(x,\lambda) = [q(x)-\lambda]\, y(x,\lambda) + f(x)$$

$$\Rightarrow y''(x,\lambda) + [\lambda - q(x)]\, y(x,\lambda) = f(x)$$ denklem sağlandı.

ii) Çözümün sınır şartlarını da sağlaması gerekir.

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left[v(x,\lambda)\cdot\int_0^x u(t,\lambda) f(t)\,dt + u(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda) f(t)\,dt \right]$$

$$y(0,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\cdot u(0,\lambda)\int_0^\pi v(t,\lambda) f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow y(0,\lambda) = \frac{\sin\alpha}{w(\lambda)}\int_0^\pi v(t,\lambda) f(t)\,dt$$

$$y'(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left[v'(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda) f(t)\,dt + u'(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda) f(t)\,dt \right] \Rightarrow y'(0,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\cdot u'(0,\lambda)\int_0^\pi v(t,\lambda) f(t)\,dt$$

$$= -\frac{\cos\alpha}{w(\lambda)}\int_0^\pi v(t,\lambda) f(t)\,dt$$

(4.2) : $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha \stackrel{?}{=} 0$

$$\Rightarrow \left[\frac{\sin\alpha}{\omega(\lambda)} \int_0^{\pi} v(t,\lambda) f(t)\, dt\right] \cdot \cos\alpha + \left[\frac{-\cos\alpha}{\omega(\lambda)} \cdot \int_0^{\pi} v(t,\lambda) f(t)\, dt\right] \cdot \sin\alpha = 0 \quad \checkmark$$

$$y(\pi,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \cdot v(\pi,\lambda) \int_0^{\pi} u(t,\lambda) f(t)\, dt = \frac{\sin\beta}{\omega(\lambda)} \int_0^{\pi} u(t,\lambda) f(t)\, dt$$

$$y'(\pi,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\, v'(\pi,\lambda) \int_0^{\pi} u(t,\lambda) f(t)\, dt = \frac{-\cos\beta}{\omega(\lambda)} \int_0^{\pi} u(t,\lambda) f(t)\, dt$$

(4.3) : $y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta \stackrel{?}{=} 0$

$$\left[\frac{\sin\beta}{\omega(\lambda)} \int_0^{\pi} u(t,\lambda) f(t)\, dt\right] \cdot \cos\beta + \left[\frac{-\cos\beta}{\omega(\lambda)} \int_0^{\pi} u(t,\lambda) f(t)\, dt\right] \cdot \sin\beta = 0 \quad \checkmark$$

iii) Bu çözümün tek olduğunu gösterelim.

$z = z(x,\lambda)$ fonksiyonunun problemin diğer bir çözümü olduğunu yani hem (4.10) denklemini hem de (4.2), (4.3) koşullarını sağladığını varsayalım.

$$y''(x,\lambda)+[\lambda-q(x)]\,y(x,\lambda)=f(x)$$
$$z''(x,\lambda)+[\lambda-q(x)]\,z(x,\lambda)=f(x)$$
$$\Rightarrow y''(x,\lambda)+[\lambda-q(x)]\,y(x,\lambda)=z''(x,\lambda)+[\lambda-q(x)]\,z(x,\lambda)$$

- $y''(x,\lambda)-z''(x,\lambda)+[\lambda-q(x)]\cdot\underbrace{[y(x,\lambda)-z(x,\lambda)]}_{g(x,\lambda)}=0$

$0\neq y(x,\lambda)-z(x,\lambda)=g(x,\lambda)$ olsun.

$\Rightarrow g''(x,\lambda)=y''(x,\lambda)-z''(x,\lambda)\Rightarrow$

- $$\left.\begin{aligned}&g''(x,\lambda)+[\lambda-q(x)]\,g(x,\lambda)=0\\&g(0,\lambda)\cos\alpha+g'(0,\lambda)\sin\alpha=0\\&g(\pi,\lambda)\cos\beta+g'(\pi,\lambda)\sin\beta=0\end{aligned}\right\}$$

λ'nın bir özdeğer olduğu elde edilir. Dolayısıyla teoremin varsayımıyla çelişki elde edilir. O halde çözüm tektir.

* (4.1)-(4.3) probleminin sıfır özdeğerine sahip olmadığı varsayılabilir.

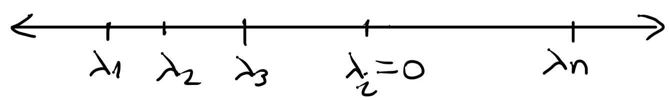
Gerçekten eğer sıfır özdeğer ise

$d \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ bir sabit olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \left[\lambda - [q(x)+d]\right] y = 0 \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \end{array}\right\}$$

sınır değer problemi gözönüne alınırsa bu problemin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ (4.1)-(4.3) probleminin özdeğerleri olmak üzere $\lambda_1 + d, \lambda_2 + d, \dots, \lambda_n + d, \dots$ şeklindedir.

Her iki problemin özfonksiyonları aynı olacaktır. d sabitini öyle seçebiliriz ki sıfır sayısı yeni problemin bir özdeğeri olmaz.



$\lambda_i = 0$ iken $\lambda_i + d \neq 0$

$(G(x,t;0) = G(x,t))$

(4.1)-(4.3) probleminin

$$y(x) + \lambda \int_0^{\pi} G(x,t)\, y(t)\, dt = 0$$

integral denklemine eşit olduğunu gösterelim.

1°) λ_0 , (4.1)-(4.3) probleminin bir özdeğeri, $y_0(x)$ de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun.

$$y_0''(x) - q(x)y_0(x) = -\lambda_0 y_0(x)$$

$$y_0(0)\cos\alpha + y_0'(0)\sin\alpha = 0$$

$$y_0(\pi)\cos\beta + y_0'(\pi)\sin\beta = 0$$

Burada, $-\lambda_0 y_0(x) = f(x)$ alınırsa;

$$y_0''(x) - q(x)y_0(x) = f(x)$$

olur. $y_0(x)$ $\quad y''(x) - q(x)y(x) = f(x)$ denkleminin (4.2)-(4.3) koşullarını sağlayan çözümüdür.

Bu durumda Teorem 4.4 e göre

$$y_0(x) = \int_0^{\pi} G(x,t) f(t)\,dt \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = \int_0^{\pi} G(x,t).\left[-\lambda_0 y_0(t)\right]dt \Rightarrow y_0(x) + \lambda_0 \int_0^{\pi} G(x,t)\, y_0(t) = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

ii) Bir λ_0 sayısı ve $y_0(x) \not\equiv 0$ bir sürekli fonksiyon için

$$y_0(x) + \lambda_0 \int_0^{\pi} G(x,t)\, y_0(t)\, dt = 0 \quad (4.12)$$

eşitliğinin sağlandığını kabul edelim.

$-\lambda_0 y_0(t) = f(t)$ olmak üzere (4.12)'yi

$$y_0(x) - \int_0^{\pi} G(x,t)\, f(t)\, dt = 0 \Rightarrow y_0(x) = \int_0^{\pi} G(x,t)\, f(t)\, dt$$

şeklinde yazabiliriz.

$f(t)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan Teorem 4.4 e göre y_0

$$y''(x) - q(x)\, y(x) = f(x)$$

denkleminin (4.2)-(4.3) koşullarını sağlayan çözümüdür. Yani

$$\left.\begin{aligned} &y_0''(x) - q(x) y_0(x) = -\lambda_0 y_0(x) \\ &y_0(0)\cos\alpha + y_0'(0)\sin\alpha = 0 \\ &y_0(\pi)\cos\beta + y_0'(\pi)\sin\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

sağlanır. Böylece λ_0 (4.1)-(4.3) probleminin bir özdeğeri ve y_0' da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur.