Teorem 2: Homojen (1) denk. verildiğinde, yalnızca $w(x)$ çözümü sahip olduğunda (3) probleminin çözümü ve B_1, B_2 sınır şartlarını sağladığında.

(Simetrik ise)

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\bar{g}(T;x).F(T)dT+c.w(x)-\frac{m_1}{l_1}r(\alpha).\bar{g}(\alpha;x)-\frac{m_2}{l_2}.r(\beta).\bar{g}(\beta;x) \quad ----(6)$$

Eğer $(l_1=l_2=0)$ ise;

(Simetrik değilse)

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\bar{g}(T;x).F(T).dT+c.w(x)+m_2.r(\beta).\frac{\partial\bar{g}(\beta;x)}{\partial T}-m_1.r(\alpha).\frac{\partial\bar{g}(\alpha;x)}{\partial T}$$ 'dir. ---(7)

ÖR) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=F(x)$, $\quad 0<x<\pi$,

$y(0)=0=y(\pi)$

Sınır değer prob. çözün.

Çözüm: Önceki örnekte Modifiye Green Fonks. bulmuştuk.

$$\bar{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi}.\sin 2T.\cos 2x + A.\sin 2x + \frac{1}{2}.\sin 2.(x-T).h(x-T)$$

$\bar{g}(x;T)$ simetrik olmadığından (7) denk. kullanalım.

$$y(x) = \int_0^{\pi} \bar{g}(T;x).F(T).dT + c.\sin 2x.$$

$$= \int_0^{\pi} \Big[\frac{T}{2\pi}.\sin 2x.\cos 2T + A.\sin 2T + \frac{1}{2}.\sin 2.(T-x).h(T-x) \Big].F(T).dT + c.\sin 2x$$

$$= c.\sin 2x + \frac{\sin 2x}{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} T.\cos 2T.F(T).dT}_{C_1 = \text{Sabit}} + \underbrace{A(x).\int_0^{\pi} F(T).\sin 2T.dT}_{} + \frac{1}{2}.\int_x^{\pi} \sin 2.(T-x).F(T).dT$$

$\frac{C_1}{2\pi}\sin 2x$

$$\underbrace{\left(c + \frac{C_1}{2\pi}\right)}_{C}\sin 2x$$

Homojen kısmın çözüm kısmı old.'dan.

$$\int_0^{\pi} F(T).w(x) = 0$$

$$y(x) = c.\sin 2x + \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \sin 2.(T-x).F(T).dT$$

$$v(x)=\frac{\psi(x)}{\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta}p(x).[\psi(x)]^2.dx}} \quad , \quad w(x)=\frac{\phi(x)-v(x).\int_{\alpha}^{\beta}p(x).\phi(x).v(x).dx}{\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta}p(x).\left[\phi(x)-v(x).\int_{\alpha}^{\beta}p(x).\phi(x).v(x)dx\right]^2.dx}} \quad ---- (8)$$

Burada homojen prob. karşılık gelen, homojen olmayan problemin tek bir aşikar olmayan çözüme sahip olduğunu göz önüne aldık. Diğer bir olasılık problemin tüm çözümlerinin göz önüne alınmasıdır. Böyle bir durumda $Ly=0$ denkleminin $v(x)$ ve $w(x)$ şeklinde iki ortonormal çözümü bulunur. Eğer $\psi(x)$ ve $\phi(x)$ lineer bağımsız çözümler ise $w(x)$ ve $v(x)$ ortonormal çözümleri (8) şeklindedir.

(9) $L\bar{g}=\delta(x;T)-w(x).w(T)-v(x).w(T)$

(10) $\beta_1.\bar{g}=0$

$\beta_2.\bar{g}=0$

Homojen sınır şartlarını sağlayan problem için Modifiye Green Fonksiyonu bu problemin çözümü olarak tanımlanır.

Diferansiyel denk. sağ kısmı uygunluk koşulunu sağladığından Modifiye Green Fonks. vardır.

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\bar{g}(T;x).F(T)dT+C.w(x)+D.v(x)-\frac{m_1}{l_1}r(\alpha).\bar{g}(\alpha;x)-\frac{m_2}{l_2}r(\beta).\bar{g}(\beta;x)$$

$(l_1=l_2=0)$

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \bar{g}(T;x)\cdot F(T)\cdot dT + \underbrace{c\cdot w(x) + D\cdot v(x)}_{\text{keyfi sabitler}} + m_2\cdot r(\beta)\cdot \frac{\partial \bar{g}(\beta;x)}{\partial T} - m_1\cdot r(\alpha)\cdot \frac{\partial \bar{g}(\alpha;x)}{\partial T}.$$

$\bar{g}(x;T)$ simetrik oldıdan $\bar{g}(T;x)$ yer değiştirebilir.

Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler için Green Fonksiyonları

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-t)\,dx = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t)\,dx = 1$$

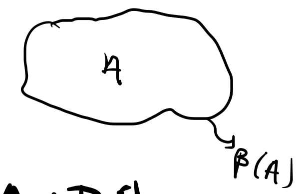
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(x-X,y-Y)\,dx\,dY = f(X,Y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-X,y-Y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-X)\,\delta(y-Y)\,dx\,dy$$

Dirichlet Sınır Değer Problemleri

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



İki boyutlu Helmholtz denklemi için Dirichlet Problemi

küçük

$$(1)\begin{cases} (a)\ \nabla^2 u + k^2 u = F(x,y) & (x,y)\in A \\ (b)\ u(x,y) = K(x,y) & (x,y)\in B(A) \end{cases}$$

büyük

A : Bölge

B(A) : Bölgenin sınırı

şeklindedir. $k=0$ ise Poisson denkleminin özel bir hali elde edilir.

$F(x,y)$, A bölgesinde birinci mertebe türevi sürekli, ikinci mertebe türevi parçalı sürekli olan bir fonksiyon ise, aynı şekilde $K(x,y)$'de $B(A)$ üzerinde aynı özelliklere sahip bir fonksiyon ise (1) problemi tek çözüme sahiptir. $F(x,y)$ ve $K(x,y)$ bu özellikleri sağlamadığında tekliği doğrulamak oldukça zordur. Green fonksiyonları bunun için iyi bir alternatiftir.

(1) problemi için $G(x,y;X,Y)$ Green fonksiyonunu

$$(2)\begin{cases} (a)\ \nabla^2 G + k^2 G = \delta(x-X,y-Y) & (x,y)\in A \\ (b)\ G(x,y;X,Y) = 0 & (x,y)\in B(A) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \nabla^2 G = \delta(x-X,y-Y) - k^2 G(x,y;X,Y)$$

probleminin çözümü olarak tanımlayalım. Sınır koşulları homojen olduğunda $G(x,y;X,Y)$, (X,Y)

deki birim nokta kaynağı nedeniyle

(3) $$u(x,y)=\iint_A G(x,y;X,Y)\,F(X,Y)\,dA$$

fonksiyonunun 1(a) dif. denklemini sağladığını ispatlamak kolaydır. (Çünkü X ve Y'ye göre integraller x ve y'ye göre diferansiyellerle yer değiştirilebilir)

1(b) şartındaki homojenliği bozan $k(x,y)$'yi hesaplamak için ise (3)'e ek şartlar eklenmelidir. Ancak açıktır ki $G(x,y;X,Y)$ (1) probleminin Green fonksiyonu olduğunda $\beta(A)$ üzerinde $u(x,y)=0$ olur. (3'den). O halde (3)'deki $u(x,y)$ fonksiyonu

(4) $$\begin{cases} (a)\quad \nabla^2 u + k^2 u = F(x,y) & (x,y)\in A \\ (b)\quad u(x,y)=0 & (x,y)\in \beta(A) \end{cases}$$

problemini sağlar.

Adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi Green fonksiyonu için genel formüller bulmak kısmi türevli dif. denklemler için kolay değildir. Çünkü adi dif. denklemlerle ilgili sınır değer problemlerinde sınır 2 noktadan oluşmaktaydı. K.T.D.D' ise iki boyutlu ise problem sınır eğrilerden, üç boyutlu ise de yüzeylerden oluşur.

K.T.D.D de Green fonksiyonunu bulmak için büyük problem sınıflarında bazı teknikler geliştirilmiştir: 1°) Tam özfonksiyon genişlemesi yöntemi

2°) Kısmi " " yöntemi

3°) Bölme yöntemi

4°) Görüntü yöntemi.

Green özdeşliği

$u(x,y)$ ve $v(x,y)$ A bölgesinde birinci türevi sürekli, ikinci türevi parçalı sürekli olan iki fonksiyon, $\beta(A)$, A nın sınırı ve $\hat{n}$ dış normal vektör olmak üzere

$$\iint_A (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\,dA = \boxed{\oint_{\beta(A)} (v\nabla u - u\nabla v)\cdot\hat{n}\,ds}$$

iki boyutlu Green özdeşliğidir.

$u = G(x,y;X,Y)$ $\quad v = G(x,y;R,S)$

$$\Rightarrow \iint_A \left[G(x,y;R,S)\cdot\nabla^2 G(x,y;X,Y) - G(x,y;X,Y)\nabla^2 G(x,y;R,S)\right]dA = 0$$

$G(x,y;X,Y)$ (2a) dif. denkleminin çözümü olduğundan $\nabla^2 G = \delta(x-X, y-Y) - k^2 G$

$$\iint_A \left[G(x,y;R,S) \cdot \nabla^2 G(x,y;X,Y) - G(x,y;X,Y)\nabla^2 G(x,y;R,S)\right] dA = 0$$

$$\Rightarrow \iint_A \left[G(x,y;R,S) \cdot \left\{\delta(x-X, y-Y) - k^2 G(x,y;X,Y)\right\} - G(x,y;X,Y) \cdot \left\{\delta(x-R, y-S) - k^2 G(x,y;R,S)\right\}\right] dA = 0$$

$$\Rightarrow \iint_A G(x,y;R,S)\,\delta(x-X,y-Y)\,dA - \cancel{\iint k^2 G(x,y;X,Y) G(x,y;R,S)\,dA} - \iint_A G(x,y;X,Y)\,\delta(x-R,y-S)\,dA + \cancel{\iint_A k^2 G(x,y;X,Y) G(x,y;R,S)\,dA}$$

$$\Rightarrow G(X,Y;R,S) - G(R,S;X,Y) = 0$$

$$\Rightarrow G(X,Y;R,S) = G(R,S;X,Y)$$ Green fonksiyonu simetriktir.

$$\iint f(x,y)\,\delta(x-X, y-Y)\,dx\,dy = f(X,Y)$$