Tanım : (Yerel Ekstrem Değerler)

Bir f fonksiyonu, eğer $x \in D(f)$ ve $|x-x_0|<h$ iken $f(x) \leq f(x_0)$ o.ş. $h>0$ sayısı varsa x_0 noktasında f fonksiyonu $f(x_0)$ yerel maksimum değerine sahiptir.

Bir f fonksiyonu, eğer $x \in D(f)$ ve $|x-x_1|<h$ iken $f(x) \geq f(x_1)$ o.ş. $h>0$ sayısı varsa x_1 noktasında f fonksiyonu $f(x_1)$ yerel minimum değerine sahiptir.

Kritik Noktalar, Tekil Noktalar ve Uç Noktalar

Bir fonksiyon sadece üç noktada ekstremum değere sahip olabilir :

1°) Kritik Noktalar; $f'(x)=0$ olan $x \in D(f)$ noktaları

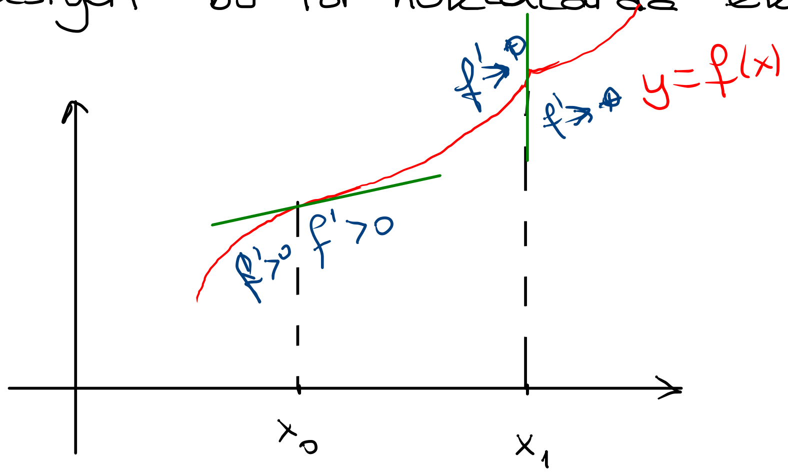
2°) Tekil Noktalar; $f'(x)$'i tanımsız kılan $x \in D(f)$ noktaları

3°) Uç Noktalar; $f(x)$'in tanım kümesinin uç noktaları
(D(f)'de olan fakat tamamen D(f)'in içinde kalan herhangi bir açık aralığa dahil olmayan noktalar)

Teorem : Bir I aralığı üzerinde tanımlı f fonksiyonu bir $x_0 \in I$ noktasında yerel ekstremum değere sahip ise o zaman bu x_0 noktası fonksiyonun ya bir kritik noktası ya bir tekil noktası ya da bir uç noktasıdır.

• Her fonksiyon bu tür noktalarda ekstremum değere sahip olmayabilir.

Ör/



$$\left.\begin{array}{l} x_0 : \text{kritik nokta} \\ x_1 : \text{tekil nokta} \end{array}\right\} \text{yerel ekstrem değer yoktur.}$$

Ör/ $g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ uç noktasında yerel max veya min'a sahip değildir.

$$g'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h \cdot \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \sin\frac{1}{h} \quad \text{limit mevcut değildir.}$$

$x=0$ Tekil nokta.

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t} \to 0 \quad \text{sürekli}$$

$D(f): [0,\infty)$

$\frac{1}{x} = t$

$x \to 0$

$t \to \infty$

$-1 \le \sin t \le 1$

$-\frac{1}{t} \le \frac{\sin t}{t} \le \frac{1}{t}$

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

Mutlak Ekstrem Değerlerin Bulunması

Ör/ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ ve $D(f): [-2,2]$ olsun. f fonksiyonunun max ve min değerlerini bulunuz.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Rightarrow 3(x-3)(x+1) = 0$

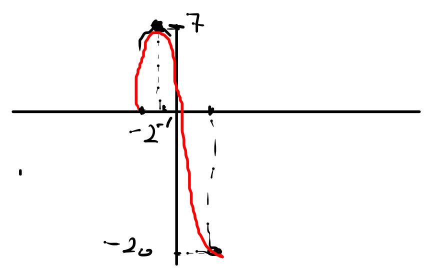
$x = 3 \quad x = -1$ kritik nokta

$x = 3 \notin [-2,2] \quad x=-2,\ x=2$ uç nokta

$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 2 = 0$

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$

$f(2) = 8 - 12 - 18 + 2 = -20$



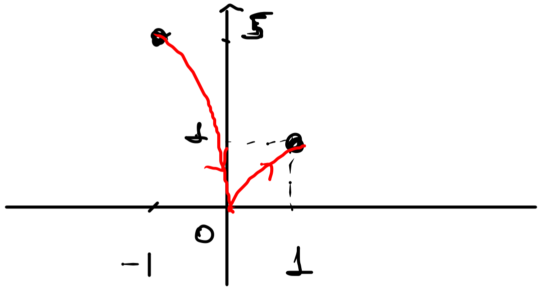
Ör/ $h(x)=3x^{2/3}-2x$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığında max ve min değerlerini bulunuz.

$$h'(x)=3\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}-2=\frac{2}{x^{1/3}}-2=\frac{2-2x^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$h'(x)=0 \Rightarrow 2(1-x^{1/3})=0 \Rightarrow x^{1/3}=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ kritik nokta

$h'(x)\to\infty \Rightarrow x^{1/3}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ tekil nokta

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right\} \text{uc noktalar}$$



$h(-1)=5$ mutlak max.

$h(0)=0$ mutlak min.

$h(1)=1$

Birinci Türev Testi

Teorem 1. (Kritik ve Tekil Noktaların Test Edilmesi)

f fonksiyonu tanım kümesinin bir x_0 iç noktasında sürekli olsun. $((a,b) \subset D(f))$

a) Eğer (a, x_0) aralığı üzerinde $f'(x_0) > 0$ ve (x_0, b) aralığı üzerinde $f'(x_0) < 0$ oluyorsa x_0 noktasında fonksiyon $f(x_0)$ yerel maksimum değerine sahiptir.

b) Eğer (a, x_0) aralığı üzerinde $f'(x_0) < 0$ ve (x_0, b) aralığı üzerinde $f'(x_0) > 0$ oluyorsa x_0 noktasında fonksiyon $f(x_0)$ yerel minimum değerine sahiptir.

Teorem 2. (Uç noktaların Test Edilmesi) $D(f): (a,b)$ $\quad x_0 \in (a,b)$

f fonksiyonu tanım kümesinin sol uç noktası olan a'da sağdan sürekli ve sağ uç noktası olan b'de soldan sürekli olsun.

i) Eğer (a, x_0) aralığında $f'(x) > 0$ ise fonksiyon a noktasında yerel minimum değere sahiptir.

ii) Eğer (a, x_0) aralığında $f'(x) < 0$ ise fonksiyon a noktasında yerel maksimum değere sahiptir.

iii) Eğer (x_0, b) aralığında $f'(x) > 0$ ise fonksiyon b noktasında yerel maksimum değere sahiptir.

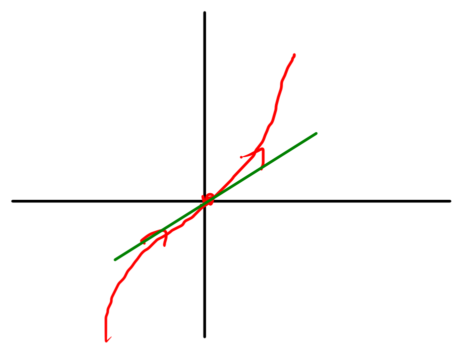
iv) Eğer (x_0,b) aralığında $f'(x)<0$ ise fonksiyon b noktasında yerel minimum değere sahiptir.

NOT: Eğer bir kritik ya da tekil noktanın sağında ve solunda türev fonksiyonu işaret değiştirmiyor ise (yani ya hep $f'(x)>0$ ya da hep $f'(x)<0$ ise) o zaman f fonksiyonu bu noktada bir maksimum veya minimum değere sahip değildir.

Ör/ $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$ $\quad y'=0 \Rightarrow 3x^2=0 \Rightarrow x=0$ kritik nokta.

x		0	
$3x^2$	$+$		$+$

$x=0$'da fonksiyon max veya min'a sahip değildir.



Ör/ $[-2,2]$ aralığında $f(x)=x^4-2x^2-3$ fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstrem değerlerini bulunuz.

$f'(x)=4x^3-4x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4x(x^2-1)=0$

$x=0,\ x=1,\ x=-1$ kritik noktalar.

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x+1$	$-$		$+$		$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

x	-2		-1		0		1		2
f'		$-$		$+$		$-$		$+$	
f	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5
	max mutlak		min mutlak		max yerel		min mutlak		max mutlak

Ör/ $f(x)=x-x^{2/3}$ ün $[-1,2]$ aralığındaki yerel ve mutlak ekstrem değerlerini bulunuz.

$$f'(x)=1-\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{3x^{1/3}-2}{x^{1/3}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^{1/3}-2=0 \Rightarrow x^{1/3}=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{8}{27}$$ kritik nokta.

x		0		$8/27$	
$3x^{1/3}-2$	$-$		$-$		$+$
$x^{1/3}$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$x=0 \Rightarrow f'(x) \to \infty$ $\quad x=0$ tekil nokta

x	-1	0	$8/27$	2
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$-2 \nearrow$	$0 \searrow$	$-4/27 \nearrow$	$2-2^{2/3}$
	min mutlak	max yerel	min yerel	max mutlak

Teorem (Açık aralıklarda ekstrem değerlerin varlığı)

Eğer f fonksiyonu (a,b) açık aralığında sürekli ve $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ ve de $\lim_{x\to b^-} f(x)=M$ ise o zaman aşağıdakiler sağlanır:

1) Eğer bir $u\in(a,b)$ için $f(u)>L$ ve $f(u)=M$ ise o zaman f fonksiyonu (a,b) aralığında bir mutlak maksimum değere sahiptir.

2) Eğer bir $v\in(a,b)$ için $f(v)<L$ ve $f(v)=M$ ise o zaman f fonksiyonu (a,b) aralığında bir mutlak minimum değere sahiptir.

Ör/ $f(x) = x + \frac{4}{x}$ fonksiyonunun $(0,\infty)$ aralığındaki ekstrem değerlerini bulunuz.

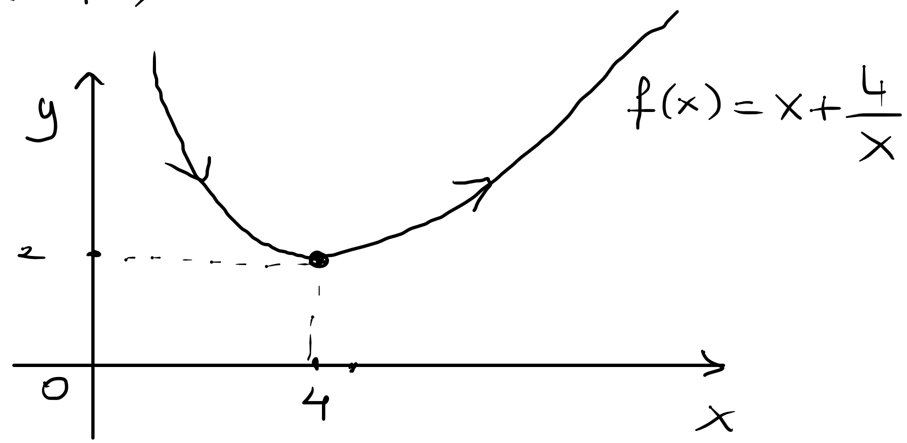
$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, \; x = -2 \qquad x = -2 \notin (0,\infty)$$

$x = 2 \Downarrow$ kritik nokta.

$$f'(x) \to \infty \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \in (0,\infty)$$

x	0	2	∞
f'	$-$		$+$
f	$\infty \searrow$	4 (min.)	$\nearrow \infty$



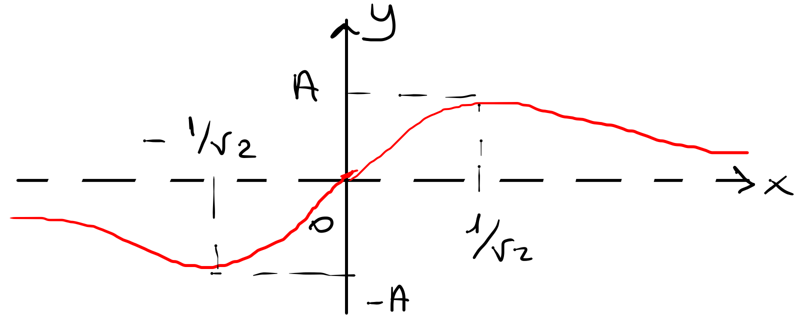
Ö5/ $f(x)=x.e^{-x^2}$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. $D(f): \mathbb{R}=(-\infty,\infty)$

$$f'(x)=e^{-x^2}+x.(-2x).e^{-x^2}=e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-2x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ kritik noktalar

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		∞
f'		$-$		$+$		$-$	
f	0	$\searrow$	$-A$	$\nearrow$	A	$\searrow$	0
			min.		max.		

$$\lim_{x\to\mp\infty} x.e^{-x^2} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2}} \underset{LH}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x.e^{x^2}}=0$$

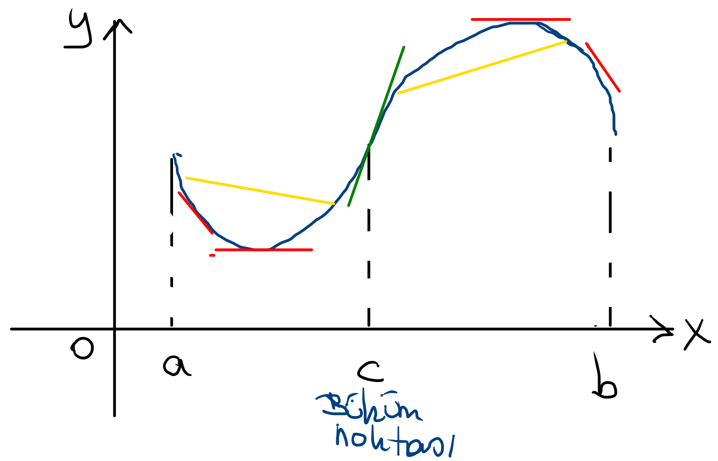


Konkavlık ve Büküm Noktaları

Konkavlık

Eğer bir f fonksiyonu açık bir I aralığında türevlenebilir ve f' türevi de bu aralık üzerinde artan bir fonksiyon ise o zaman f fonksiyonu bu aralık üzerinde yukarı doğru konkavdır.

Benzer şekilde, f' türevi I aralığı üzerinde azalan bir fonksiyon ise o zaman f fonksiyonu bu aralık üzerinde aşağı doğru konkavdır.



Konkavlık türevin sabit olmadığı aralıklarda geçerlidir.

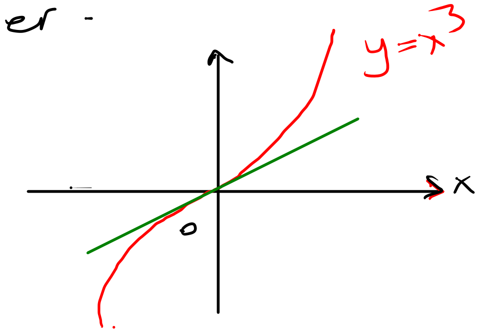
Büküm noktaları

Bir $y=f(x)$ eğrisi ve $x=x_0$ noktası verildiğinde eğer

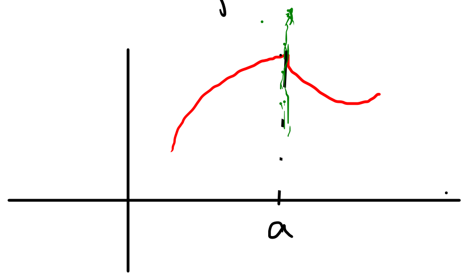
a) $y=f(x)$'in grafiği $x=x_0$'da teğete sahip

b) f'in x_0'ın her iki tarafındaki konkavlıkları birbirine zıt ise $x=x_0$ noktasına f'in büküm noktası denir.

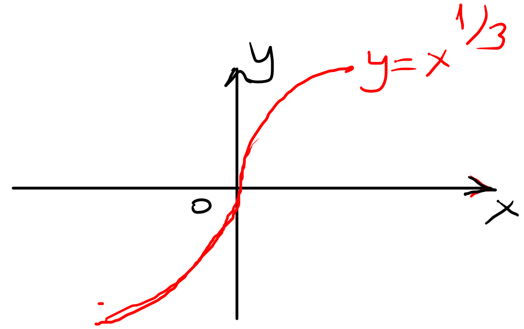
NOT: Büküm noktasının tanımına göre a) şıkkı fonksiyonun x_0 noktasında türevlenebilir ya da grafiğinin bir dik teğete sahip olduğunu ve de b) şıkkı grafiğin teğeti x_0 da kestiğini söyler.



$x=0$ eğrinin büküm noktasıdır.



konkavlık zıt yöndedir. Ancak eğri bir teğete sahip değildir.



$x=0$'da dik teğete sahiptir. Ve konkavlık zıt yönde olduğundan $x=0$ bir büküm noktasıdır.

Teorem (Konkavlık ve ikinci türev)

a) Eğer f, I açık aralığı üzerinde türevlenebilir ve $f''(x)>0$ ise, I üzerinde yukarı doğru konkavdır.

b) Eğer f, I açık aralığı üzerinde türevlenebilir ve $f''(x)<0$ ise, I üzerinde aşağı doğru konkavdır.

c) Eğer x_0, f'in büküm noktası ve $f''(x_0)$ mevcut ise $f''(x_0)=0$'dır.

Ör/ $f(x)=x^6-10x^4$ fonksiyonunun konkavlık aralıklarını ve büküm noktalarını bulunuz.

$f'(x)=6x^5-40x^3$

$f''(x)=30x^4-120x^2$

$=30x^2(x^2-4)$

x		B.N -2		0		B.N 2	
f''	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cup$

$f'(-2)$ mevcut $\qquad f'(2)$ mevcut

$f''(x)=0 \Rightarrow x^2(x^2-4)=0$

$x_{1,2}=0 \quad x_3=-2 \quad x_4=2$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^3(3x^2-20)$

Ör/ $f(x)=x^4-2x^3+1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları, yerel ekstrem noktaların ve konkavlık, büküm noktalarını belirleyiniz.

$f'(x)=4x^3-6x^2 \qquad f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-6x^2=0 \Rightarrow 2x^2(2x-3)=0 \Rightarrow x_{1,2}=0 \quad x_3=\frac{3}{2}$ K.N.

$f''(x)=12x^2-12x \qquad f''(x)=0 \Rightarrow 12x(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1$

x	$-\infty$		0 (B.N)		1 (B.N)		$3/2$		∞
f''		$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$		$+$	
f'		$-$	$\bullet$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$	
f	∞	azalan, yukarı	$\perp$	azalan, aşağı	$\supset$	azalan, yukarı	Min. $-11/16$	artan, yukarı	∞
			$f'(0)$ mevcut		$f'(1)$ mevcut				

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1 = \frac{81}{16} - \frac{27}{4} + 1$$

$$= \frac{81}{16} - \frac{23}{4}$$

$$= \frac{81-92}{16} = \frac{-11}{16}$$

İkinci Türev Testi

Teorem:

1°) Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)>0$ ise f, x_0'da bir yerel minimum değere sahiptir.

2°) Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)<0$ ise f, x_0'da bir yerel maksimum değere sahiptir.

3°) Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)=0$ ise herhangi bir çıkarımda bulunamayız.

[$(h>0)$ $\left.\begin{matrix} f'(x_0+h)>0 \\ f'(x_0-h)<0 \end{matrix}\right\}$ min., $\left.\begin{matrix} f'(x_0+h)<0 \\ f'(x_0-h)>0 \end{matrix}\right\}$ max, konkavlık yön değiştiriyorsa büküm noktası]

Ör/ $f(x)=x^4 \longrightarrow f'(x)=4x^3 \longrightarrow f''(x)=12x^2$ $x=0 \Rightarrow f'(0)=f''(0)=0$

$f(x)=-x^4 \longrightarrow f'(x)=-4x^3 \longrightarrow f''(x)=-12x^2$ $x=0 \Rightarrow f'(0)=f''(0)=0$

$f(x)=x^3 \longrightarrow f'(x)=3x^2 \longrightarrow f''(x)=6x$ $x=0 \Rightarrow f'(0)=f''(0)=0$

$f'(0-h)=-4h^3<0$
$f'(0+h)=4h^3>0$ min.

$f'(0-h)=4h^3>0$
$f'(0+h)=-4h^3<0$ max

$$\left.\begin{array}{l} f''(0-h)=-6h<0 \\ f''(0+h)=6h>0 \end{array}\right\}$$ konkavlik zıt yönde $x=0$ B.N.

Ör/ $f(x)=x^2 \cdot e^{-x}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \quad x=2$ K.N.

$f''(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}$
$=2e^{-x}-4xe^{-x}+x^2e^{-x}$
$=e^{-x}(x^2-4x+2)$

$f''(0)=e^0\cdot(2)=2>0 \quad x=0$ min: $f(0)=0$

$f''(2)=e^{-2}(4-8+2)=-\frac{2}{e^2}<0 \quad x=2$ max: $f(2)=\frac{4}{e^2}$

Yüksek Mertebeden Türev Testi

Bir f fonksiyonu verilmiş olsun. $k \geq 2$ için

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \ , \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0 \quad \text{olsun.}$$

Eğer k tek ise $x = x_0$ bir büküm noktasıdır.

Eğer k çift ve

$$\begin{cases} f^{(k)}(x_0) > 0 \text{ ise } x = x_0 \text{ bir yerel min. nokta} \\ f^{(k)}(x_0) < 0 \text{ ise } x = x_0 \text{ bir yerel max. nokta.} \end{cases}$$

Ör/ $f(x) = (x-1)^5 + 3$ fonksiyonunun büküm noktalarını bulunuz.

$f'(x) = 5(x-1)^4$

$f''(x) = 20(x-1)^3$

$f'''(x) = 60(x-1)^2$

$f^{(4)}(x) = 120(x-1)$

$f^{(5)}(x) = 120$

$k = 5$

$f^{(5)}(1) = 120 \neq 0$

$f'(1) = f''(1) = f'''(1) = f^{(4)}(1) = 0$

$x = 1$ büküm noktasıdır.

Asimptotlar

Eğer, belirli bir doğruya, verilen bir fonksiyonun grafiği, doğru orjinden uzaklaştıkça, istenildiği kadar yakınlaşıyorsa fonksiyonun grafiği bir asimptota sahiptir denir.

1) Düşey (Dikey) Asimptot

Eğer $\lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$ veya $\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ ya da her iki durumda söz konusu ise $x=a$ fonksiyon grafiğinin düşey (dikey) asimptotudur.

Ör/ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x=0 \quad x=1$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x(x-1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$

$$\boxed{x=0 \quad D.A}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x(x-1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{\substack{h\to 0\\(h>0)}} \frac{1}{(0-h)(0-h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(h+1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{\substack{h\to 0\\(h>0)}} \frac{1}{(0+h)(0+h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\underbrace{h}_{>0}\underbrace{(h-1)}_{<0}} = -\infty$$

$$\boxed{x=1 \quad D.A}$$

2) Yatay Asimptot

Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ veya $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ ya da her iki durumda söz konusu ise $y=L$ doğrusu yatay asimptot doğrusudur.

Ör/ $y=\dfrac{1}{x^2-x}$ fonksiyonunun yatay asimptotlarını bulunuz.

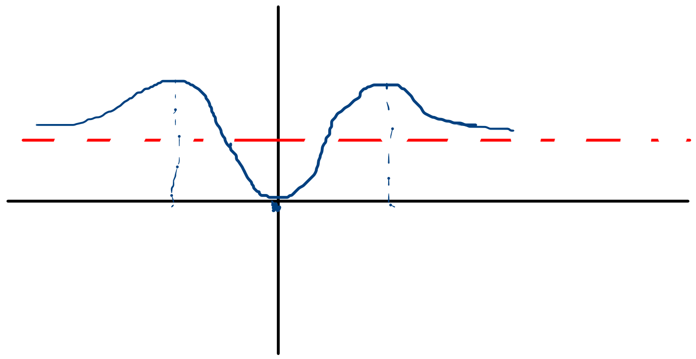
$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2-x}=0$, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-x}=0$ $y=0$ Y.A. doğrusudur.

NOT: Hiçbir eğri kolu kendi asimptotunu kesmez.

Ör/ $f(x)=\dfrac{x^4+x^2}{x^4+1}$ asimptotlarını bulunuz.

D.A. yoktur.

$\lim_{x\to\mp\infty} \dfrac{x^4+x^2}{x^4+1}=1$ $y=1$ Y.A.



Ör/ $y=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ fonksiyonunun asimptotunu bulunuz. Hangi noktalarda eğri asimptotu kesmektedir?

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}=0$$ $y=0$ Y.A. doğrusu

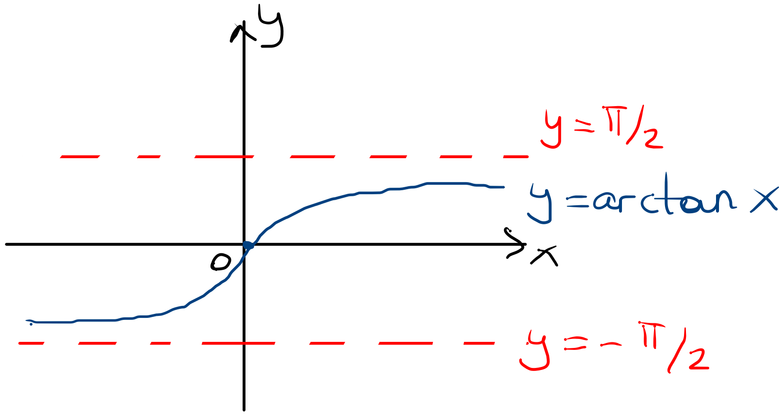
$\sin x=0 \Rightarrow x=n\pi \quad (n\in\mathbb{N})$

Ör/ $y=\tan^{-1}x$ fonksiyonunun yatay asimptotlarını bulunuz.

$y=\arctan x$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=\arctan(-\infty)=-\arctan\infty=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\arctan x=\arctan(\infty)=\frac{\pi}{2}$$



3) Eğik Asimptot

Eğer

$$\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \text{ya da}$$

her iki durumda söz konusu ise $y = ax+b$ doğrusuna fonksiyonun grafiğinin eğik asimptotu denir.

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ ise Eğik asimptot olabilir.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$ limiti mevcut ve $0 < a < \infty$,

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$$ limiti mevcut ve $b < \infty$ ise

$y = ax+b$ Eğik asimptot doğrusudur.

$a = 0$ veya $a \to \infty$ ise eğik asimptot yoktur. Eğri kolu paraboliktir.

Ör/ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ asimptotlarını bulunuz.

$x=0$ D.A. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\to\infty$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=\mp\infty$ E.A. olabilir.

1. yol

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x \\ \cline{2-2} -x^2 & x \\ \hline 1 & \end{array}$$

x → E.A doğrusu

2. yol

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$y=x$ E.A doğrusu.

Ör/ $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x.e^x}{1+e^x}=\underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty}x.e^x\right)}_{0.\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0 \qquad \boxed{y=0 \text{ Y.A}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x.e^x}{1+e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+xe^x}{e^x}=\infty \quad \text{E.A olabilir.}$$

$$\begin{array}{l|l} xe^x & 1+e^x \\ \hline -xe^x \mp x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{xe^x}{1+e^x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x.e^x}{1+e^x}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{xe^x}-x-\cancel{xe^x}}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+e^x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^x}=0$$

$$\boxed{y=x \text{ E.A.}}$$