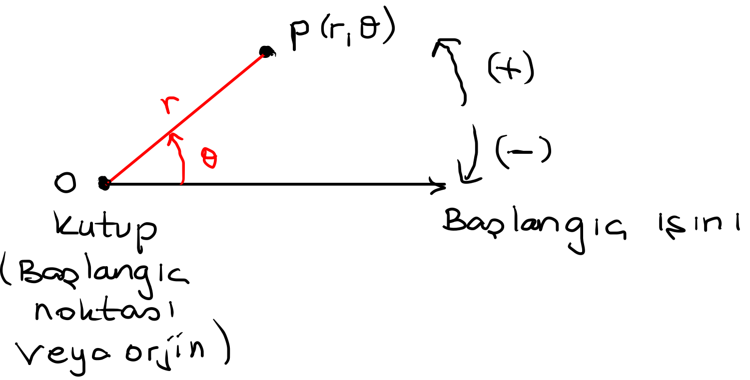
Kutupsal Koordinatlar



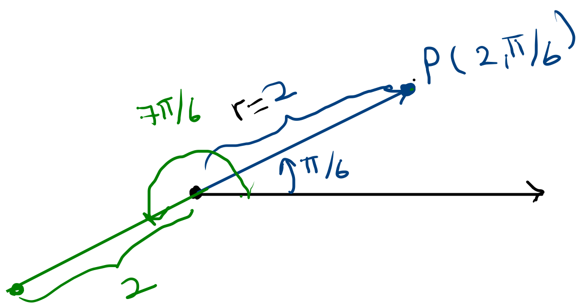
Kutupsal koordinatları tanımlamak için önce bir başlangıç noktası ve bir başlangıç ışını sabitleriz.

$\theta \to$ Başlangıç ışınından OP'ye olan yönlü açı

$r \to$ Orjinden P'ye olan yönlü uzaklık.

Düzlemdeki bir noktayı (r, θ) gibi bir çift ile gösterebiliriz. Bu koordinat çiftine kutupsal koordinatlar denir.

- Verilen bir nokta ile ilgili açı tek değildir. Düzlemdeki bir noktanın sadece bir çift kartezyen koordinatı olmasına karşın sonsuz miktarda kutupsal koordinat çifti vardır.
- Kutupsal koordinatlar bir P noktasını bir çemberle merkezinden çıkan bir ışının kesişmesi olarak belirtir.



$$P(\underbrace{2}_{r}, \underbrace{\tfrac{\pi}{6}}_{\theta}) = \left(2, \frac{\pi}{6} \mp 2k\pi\right) = P\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right) = \left(-2, \frac{7\pi}{6} \mp 2k\pi\right)$$

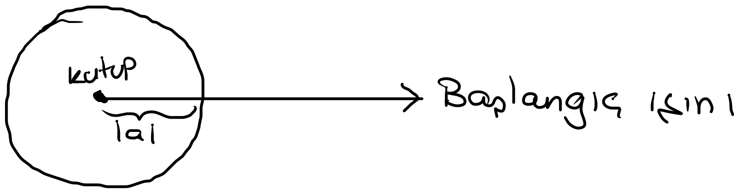
$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$P\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$$

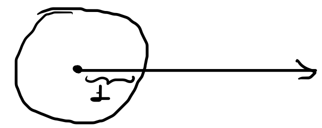
Not: r'nin negatif değeri θ'nın hareketli kolu üzerinde ters yönde alınmış uzaklıktır.

Kutupsal denklemler ve grafikleri

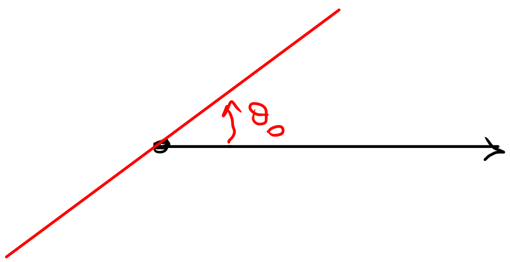
- Eğer r değerini $r = a \neq 0$ şeklinde sabit olarak seçersek $P(r,\theta)$ noktası kutuptan $|a|$ birim uzaktadır. θ ise uzunluğu 2π olan bir aralıkta değişiyorsa P noktası merkezi kutupta ve yarıçapı $|a|$ olan çemberi verir.



Örn/ $r = 1$

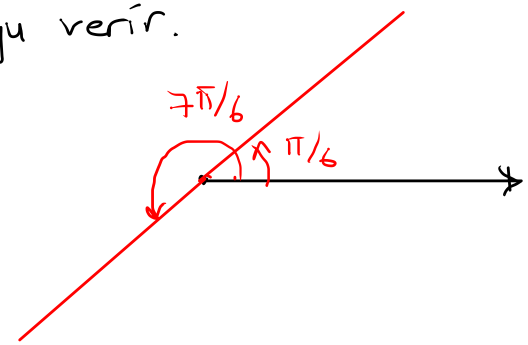


- Eğer θ açısı $\theta = \theta_0$ ve r uzaklığı $-\infty < r < \infty$ olarak alınırsa $P(r,\theta)$ noktası başlangıç ışını ile θ_0 açısı yapan ve kutuptan geçen doğruyu verir.

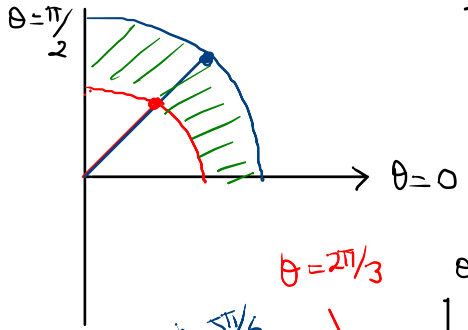


Örn/ $\theta = \pi/6$

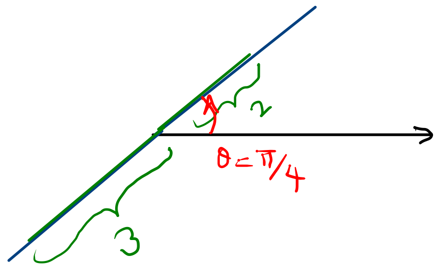
$\theta = 7\pi/6$



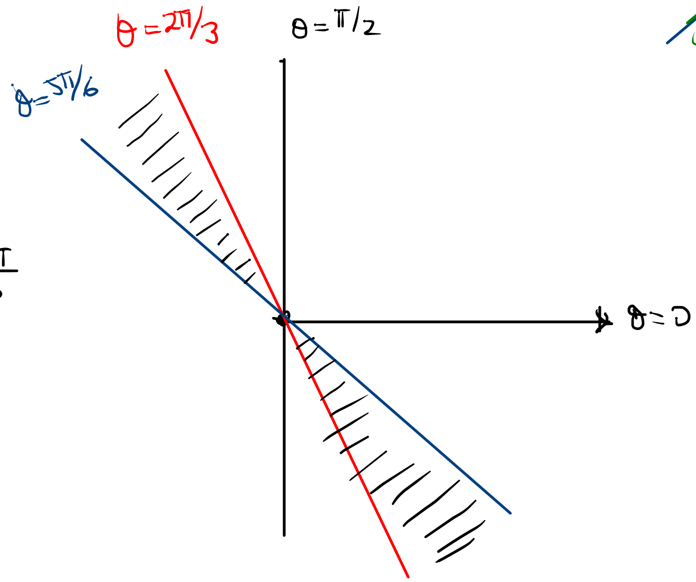
• $1 \leq r \leq 2 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



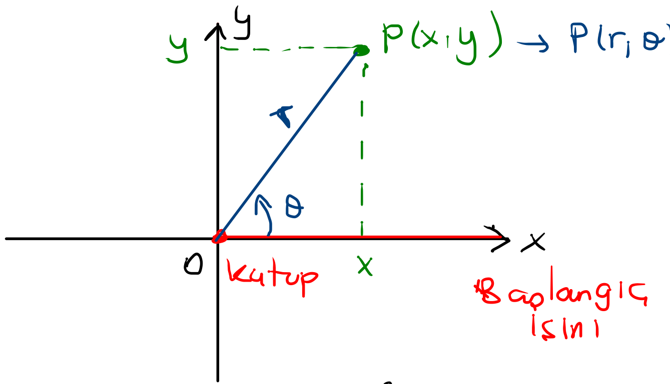
• $-3 \leq r \leq 2 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$



• $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



Kutupsal ve kartezyen koordinatlar arasındaki ilişki



$x = r \cdot \cos\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\sin\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}$

- $r\cos\theta = 2 \Rightarrow x = 2$
- $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$
- $r^2\cos\theta \cdot \sin\theta = 4 \Rightarrow x \cdot y = 4$

- $r = 1 + 2r\cos\theta$

$\sqrt{x^2+y^2} = 1+2x$

$x^2+y^2 = (1+2x)^2$

- $r^2 = 4r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2 = 4x$

$(x-2)^2+y^2 = 4$

$M(2,0)$ $r=2$ olan Center

- $r = \dfrac{4}{2\cos\theta+\sin\theta}$

$2r\cos\theta + r\sin\theta = 4$

$2x + y = 4$ doğru

- $x^2+(y-3)^2 = 9$

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$ $r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 3)^2 = 9$

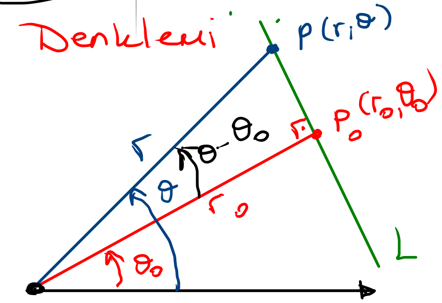
$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 6r\sin\theta + \cancel{9} = \cancel{9}$

$r^2 - 6r\sin\theta = 0$

$r(r - 6\sin\theta) = 0$

$\boxed{r = 6\sin\theta}$

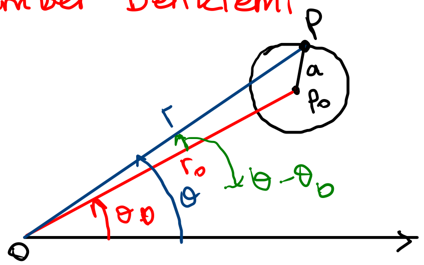
Doğru Denklemi



Orjinden L doğrusuna dik dan doğrunun L'yi $r_0 \geq 0$ olmak üzere P_0 noktasında kestiğini varsayalım. Bu durumda eğer $P(r,\theta)$ L üzerinde başka bir nokta ise P, P_0 ve orjin noktaları bir dik üçgenin köşelerini oluştururlar. Dolayısıyla

$r_0 = r.\cos(\theta-\theta_0) \rightarrow$ Doğrunun kutupsal koordinatlardaki genel denklemi

Çember Denklemi



Merkezi $P_0(r_0,\theta_0)$ noktasında olan a yarıçaplı çemberin kutupsal denklemini bulalım. Bunun için çember üzerinde $P(r,\theta)$ noktasını alarak OPP_0 üçgeninde kosinüs kuralını uygularız.

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)$$

- Çember orjinden geçiyorsa $(a=r_0)$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 2ra\cos(\theta-\theta_0) = 0 \Rightarrow r = 2a\cos(\theta-\theta_0)$$

- Merkez başlangıç ışını üzerinde (x-ekseni üzerinde) ve orjinden geçiyorsa $(a=r_0,\ \theta_0=0)$
  $\theta_0=\pi$

$$r = \mp 2a\cos\theta$$

- Merkez $\theta=\mp\frac{\pi}{2}$ üzerinde (y-ekseni üzerinde) ve orjinden geçiyorsa $(a=r_0,\ \theta_0=90^\circ)$

$$r = \mp 2a\sin\theta$$

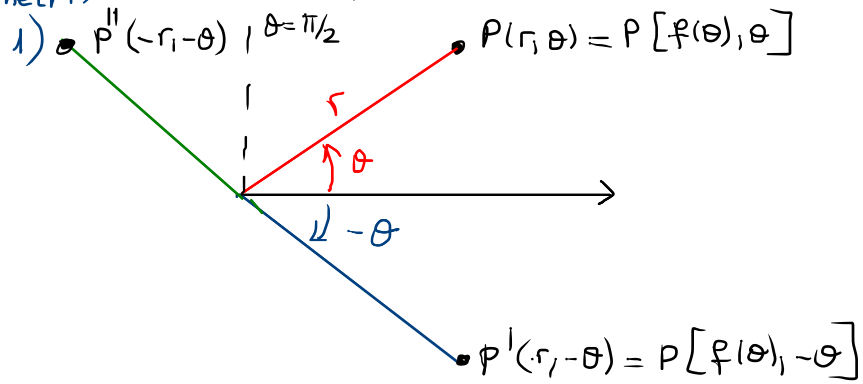
- $(3,0) \rightarrow r = 6\cos\theta$ $\qquad (-1/2, 0) \rightarrow r = -\cos\theta$
- $(2,\pi/2) \rightarrow r = 4\sin\theta$ $\qquad (-1/2, \pi/2) \rightarrow r = -\sin\theta$

Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

$r=f(\theta)$ eğrisi için simetri özelliklerini verelim.

(Simetri)

1)

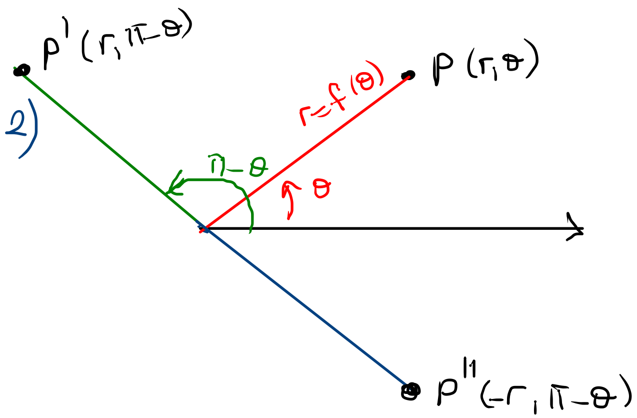


$\theta \to -\theta \Rightarrow f(-\theta)=f(\theta) \Rightarrow$ başlangıç ışını (x-ekseni) simetri ekseni.

$f(-\theta)=-f(\theta) \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ (y-ekseni) simetri eksenidir.

Her iki durumda da inceleme aralığı sadece pozitif değerleri seçerek belirlenir.
($f(\theta)$'yı θ'nın pozitif değerleri için inceleriz)

2)

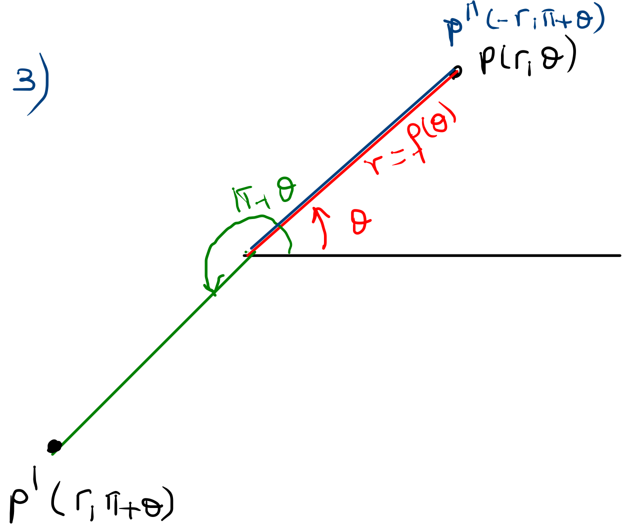


$\theta \to \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta)=f(\theta) \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ (y-ekseni) simetri eksenidir.

$f(\pi-\theta)=-f(\theta) \Rightarrow$ başlangıç ışını (x-ekseni) simetri eksenidir.

Her iki durumda da inceleme aralığı $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olarak seçilir.

3)



$\theta \to \pi + \theta$ $\quad f(\pi+\theta) = f(\theta) \Rightarrow$ kutup simetri noktasıdır.

$f(\pi+\theta) = -f(\theta) \Rightarrow$ üst üste çakışıktır.

Her iki durumda da inceleme π'ye eşit uzunlukta bir aralıkta yapılır.

Eğim:

$r = f(\theta)$ eğrisinin eğimi (r, θ) noktasında $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$ olmak üzere;

$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$

$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

Ör: $r = 1 - \cos\theta$ eğrisine $\theta = \frac{\pi}{2}$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad r = 1 = f(\theta)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \cancel{1 \cdot \cos\frac{\pi}{2}}^{\to 0}}{\cancel{1 \cdot \cos\frac{\pi}{2}}^{\to 0} - 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$x_0 = r\cos\theta \Rightarrow \left. x_0 \right|_{\pi/2} = 0$

$y_0 = r\sin\theta \Rightarrow \left. y_0 \right|_{\pi/2} = 1$

$y_0 = F(x_0) = 1$

$f'(\theta) = \sin\theta$

$f'(\frac{\pi}{2}) = 1$

Teğet denk: $y - y_0 = y_0' \cdot (x - x_0)$

$y - 1 = -1 \; (x - 0) \Rightarrow \boxed{x + y = 1}$

Grafik çiziminde izlenen yol

1) $r=f(\theta)$ fonksiyonunun tanımlı ve sürekli olduğu aralık bulunur. (Çoğunlukla trigonometrik fonksiyon olduklarından periyodik fonksiyonlardır ve tanım aralığı periyodlarına göre belirlenir)

2) Simetri özelliklerinden yararlanılarak inceleme aralığı düzenlenir.

3) $r=f(\theta)$ fonksiyonunun değişimi türev yardımıyla incelenir.

4) Eğrinin kutuptan geçen kolları kutuptaki teğeti belirler. Bunun için $r=0$ denklemini sağlayan θ değerleri bulunur.

5) Tüm bu bilgiler tabloda toplanarak eğri çizilir.

Ör) $r=1-\cos\theta$ eğrisini çiziniz.

$D(f)=\mathbb{R}$ $\quad T=2\pi$ olduğundan incelemeyi 2π'ye eşit uzunlukta bir aralıkta yapmak yeterlidir.

$\ldots, [-\pi,\pi], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \ldots$

$\theta \to -\theta \Rightarrow r=1-\cos(-\theta)=1-\cos\theta=r$ başlangıç ışını simetri eksenidir. İnceleme sadece +ve değerler için yapılacağından

İnc. Aralığı : $[0,\pi]$

$\theta \to \pi-\theta \Rightarrow r=1-\cos(\pi-\theta)=1+\cos\theta \neq r$, $\neq -r$ simetri yok

$\theta \to \pi+\theta \Rightarrow r=1-\cos(\pi+\theta)=1+\cos\theta \neq r$, $\neq -r$ simetri yok.

$r = 1 - \cos\theta \Rightarrow r' = \sin\theta > 0$ $[0, \pi]$

artan fonk.

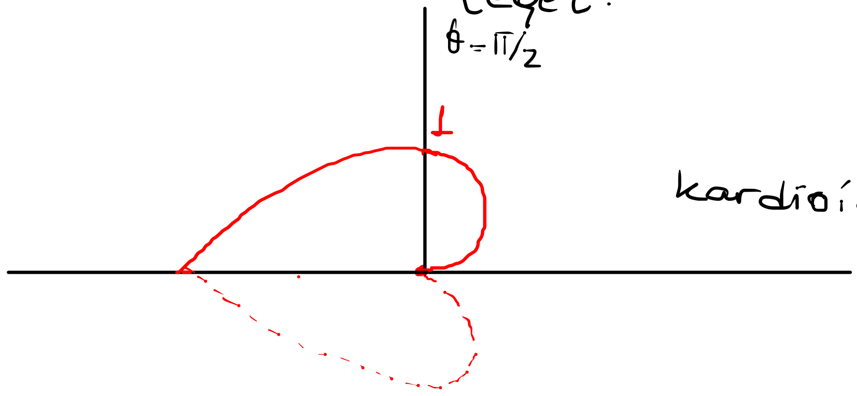
$\theta = 0 \Rightarrow r = 0$

$\theta = \pi \Rightarrow r = 2$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1$

$r = 0 \Rightarrow 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ kutuptaki teğet.

θ	0	$\pi/2$	π
$f'(\theta)$	$+$		$+$
$f(\theta)$	$0 \nearrow$	1	$\nearrow 2$



kardioid