

Yüksek Mertebeden Lineer Olmayan Denklemler

1°) Bağımlı değişkeni içermeyen denklemler

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

şeklindeki denklemlerdir. Böyle bir denklemde en küçük türeve p dönüşümü yapılır.

Böylece denklemin mertebesi 1 düşer. Yani,

$$y' = p \Rightarrow f(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0 \quad (2)$$

olur. Eğer (2) denkleminin genel çözümü

$$p = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

şeklinde bulunabilirse

$$y' = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

olacaktır ve ifade integre edilerek

$$y = \int \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx + c_n$$

şeklinde (1) denkleminin genel çözümü elde edilir.

Ör $y''' - (y'')^2 = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y'' = p \Rightarrow y''' = p'$$

$$p' - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} - p^2 = 0 \quad (p \neq 0)$$

$$\int \frac{dp}{p^2} - \int dx = \int 0 \Rightarrow -\frac{1}{p} - x = c_1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{p} = x + c_1$$

$$\Rightarrow p = \frac{-1}{x+c_1} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{x+c_1}$$

$$\Rightarrow y' = \int \frac{-1}{x+c_1} dx + c_2 \Rightarrow y' = -\ln|x+c_1| + c_2$$

$$y' = -\ln|x+c_1| + c_2$$

$$\Rightarrow y = \int [-\ln|x+c_1| + c_2] dx$$

$$= -\int \ln|x+c_1| dx + \int c_2 dx$$

$$= -\left[x \ln|x+c_1| - \int \frac{x}{x+c_1} dx \right] + c_2 x + c_3$$

$$= -x \ln|x+c_1| + \int \left(1 - \frac{c_1}{x+c_1}\right) dx + c_2 x + c_3$$

$$= -x \ln|x+c_1| + x - c_1 \ln|x+c_1| + c_2 x + c_3$$

$$= -\ln|x+c_1| \cdot (x+c_1) + x(1+c_2) + c_3$$

$$\ln|x+c_1| = u \quad dx = dv$$

$$\frac{1}{x+c_1} dx = du \quad x = v$$

1. mertebe lineer dif. denk. in
şekli

$$y' + s(x)y = q(x)$$

$$\lambda = e^{\int s(x) dx}$$

ör/ $xy'' - 2y' = 12x^3$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = p \Rightarrow y'' = p' \Rightarrow xp' - 2p = 12x^3 \Rightarrow p' - \frac{2}{x}p = 12x^2$$

1. mertebe lineer dif. denk.

$$s(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow \lambda = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

~~1-701~~

$$p - \frac{2}{x}p = 12x^2$$

$$\lambda = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{p'}{x^2} - \frac{2}{x^3}p = 12$$

$$\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}p = 12$$

$$\frac{1}{x^2} dp - \frac{2}{x^3}p dx = 12 dx$$

$$\int d\left(p \cdot \frac{1}{x^2}\right) = \int 12 dx$$

$$\frac{p}{x^2} = 12x + c_1$$

$$p = 12x^3 + c_1 x^2$$

$$\Rightarrow y' = 12x^3 + c_1 x^2$$

$$y = 12 \frac{x^4}{4} + c_1 \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$= 3x^4 + \frac{c_1}{3}x^3 + c_2$$

~~2-701~~

$$x y'' - 2y' = 12x^3 \Rightarrow x^2 y'' - 2x y' = 12x^4 \quad (\text{Euler dif. form})$$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$y' = e^{-t} Dy$$

$$y'' = e^{-2t} D(D-1)y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{2t} \cdot e^{-2t}}{1} D(D-1)y - \frac{2e^t \cdot e^{-t}}{1} Dy = 12e^{4t} \\ (D^2 - D - 2D)y = 12e^{4t} \end{array} \right.$$

$$\text{K.D: } r^2 - 3r = 0$$

$$r(r-3) = 0$$

$$r_1 = 0 \quad r_2 = 3 \Rightarrow y_h = c_1 + c_2 e^{3t}$$

$$y_0 = A e^{4t}$$

$$y_0' = 4A e^{4t}$$

$$y_0'' = 16A e^{4t}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = A e^{4t} \\ y_0' = 4A e^{4t} \\ y_0'' = 16A e^{4t} \end{array} \right\} \Rightarrow 16A e^{4t} - 3 \cdot 4A e^{4t} = 12e^{4t}$$

$$4A e^{4t} = 12e^{4t} \Rightarrow 4A = 12$$

$$A = 3$$

$$\Rightarrow y_0 = 3e^{4t} \Rightarrow y_{G.C} = c_1 + c_2 e^{3t} + 3e^{4t}$$

$$= c_1 + c_2 x^3 + 3x^4$$

Or $y'' - (y')^3 = 0$ dif. denk'nin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = p \Rightarrow y'' = p' \Rightarrow p' - p^3 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} - p^3 = 0 \Rightarrow \int \frac{dp}{p^3} - \int dx = \int 0$$

$$-\frac{1}{2p^2} - x = -c_1 \Rightarrow \frac{1}{2p^2} = c_1 - x$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{2(c_1 - x)} \Rightarrow p = \pm \sqrt{\frac{1}{2(c_1 - x)}} \Rightarrow y' = \pm \sqrt{\frac{1}{2(c_1 - x)}} \Rightarrow y = \pm \int \sqrt{\frac{1}{2(c_1 - x)}} dx = \pm \int \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{c_1 - x}} dx$$

$$c_1 - x = u^2$$

$$-dx = 2u du$$

$$dx = -2u du$$

$$\Rightarrow y = \pm \int \frac{-2u du}{\sqrt{2} \cdot u} = \pm \frac{2}{\sqrt{2}} \int du + c_2$$

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{c_1 - x} + c_2$$

$$\Rightarrow y - c_2 = \pm \sqrt{2} \sqrt{c_1 - x}$$

$$(y - c_2)^2 = 2(c_1 - x)$$

$$\frac{y^2}{2} - 2yc_2 + c_2^2 = 2(c_1 - x)$$

Öd $\rightarrow y'' = y'^3 + y'$
 $y'' = a(1+y'^2)^{3/2}$ $(a \rightarrow s, b, t)$

2) Bağımsız değişkenin bulunmadığı denklemler

$$f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Şeklindeki denklemlerdir. $y' = p$ dönüşümü yapılarak denklemler çözülmeye çalışılır. Ancak 2. ve daha yüksek mertebeden türemler denklemlerinde x bulunmadığından y 'ye bağlı olarak ifade edilmelidir.

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dp}{dy} \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right) = p \frac{dp}{dy}$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \left[\left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p \cdot \frac{d^2 p}{dy^2} \right] \cdot p = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \end{aligned}$$

⋮

Türemler denklemlerde yerine yazıldığında denklemin mertebesi 1 düşer. Eğer

$$f(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

denkleminin genel çözümü $p = \varphi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ şeklinde bulunabilirse o zaman;

$$y' = \varphi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})} = dx \Rightarrow x = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})} + c_n$$

şeklinde istenen genel çözüm elde edilir.

Ör/ $yy'' = y^2 y' + y'^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy} \Rightarrow y \cdot p \frac{dp}{dy} = y^2 p + p^2 \Rightarrow p \left[y \frac{dp}{dy} - y^2 - p \right] = 0$$

1°) $p=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y=c \rightarrow$ dif. denklemin sağlıyorsa tekil çözümdür. ✓

$$2°) y \frac{dp}{dy} - y^2 - p = 0 \Rightarrow y \frac{dp}{dy} - p = y^2 \Rightarrow \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = y \quad (y \neq 0)$$

L.D.D.

$$s(y) = -\frac{1}{y}$$

$$\lambda = e^{\int s(y) dy} = e^{\int -\frac{dy}{y}} = e^{-\ln|y|} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y^2} = 1$$

$$\int d\left(\frac{p}{y}\right) = \int dy \Rightarrow \frac{p}{y} = y + c_1 \Rightarrow p = y(y + c_1)$$

$$\Rightarrow y' = y(y+c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(y+c_1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y(y+c_1)} = \int dx$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{y(y+c_1)} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{y+c_1} \\ A &= \frac{1}{c_1}, \quad B = -\frac{1}{c_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int \left[\frac{1/c_1}{y} - \frac{1/c_1}{y+c_1} \right] dy = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_1} \ln |y| - \frac{1}{c_1} \ln |y+c_1| = x + c_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_1} \ln \left| \frac{y}{y+c_1} \right| = x + c_2 \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{y+c_1} \right| = c_1(x + c_2)$$

Ö5/ $y'' = y' \cdot e^y$ dif. denklemini ve $y(0)=0, y'(0)=2$ başlangıç koşullarıyla oluşturulan problemin çözümünü bulunuz.

$$y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy} \Rightarrow p \frac{dp}{dy} = p \cdot e^y \Rightarrow p \left[\frac{dp}{dy} - e^y \right] = 0$$

$$\begin{aligned} &\nearrow 1^\circ) p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c \\ &\searrow 2^\circ) \frac{dp}{dy} - e^y = 0 \end{aligned}$$

T.C.

$$\frac{dp}{dy} - e^y = 0 \Rightarrow \int dp - \int e^y dy = \int 0 \Rightarrow y' = e^y + c_1 \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y + c_1} = \int dx$$

$$p - e^y = c_1$$

$$p = e^y + c_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{-y} dy}{(1 + c_1 e^{-y})} = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{-\frac{dt}{c_1}}{t} = \int dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c_1} \ln |t| = x + c_2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c_1} \ln |1 + c_1 e^{-y}| = x + c_2$$

$$y' = e^y + c_1$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{c_1} \ln |1 + c_1| = c_2$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow e^0 + c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow -1 \ln 2 = c_2$$

$$c_2 = -\ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{-\ln |1 + e^{-y}| = x - \ln 2}$$

Ör/ $y'' - y'^3 = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy} \Rightarrow p \frac{dp}{dy} - p^3 = 0 \Rightarrow p \left[\frac{dp}{dy} - p^2 \right] = 0$$

$$1^o) p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c \quad \text{T.C.}$$

$$2^o) \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \int \frac{dp}{p^2} - \int dy = \int 0 \Rightarrow -\frac{1}{p} - y = c_1 \Rightarrow -\frac{1}{p} = y + c_1$$

$$\Rightarrow p = \frac{-1}{y + c_1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{y + c_1} \Rightarrow (y + c_1) dy = -dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} + c_1 y = -x + c_2$$

Öd $\rightarrow \bullet 2yy'' = 4 + y'^2$

$$\bullet y'' = 2y' + 8y \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8$$