Diferansiyel Denklem Sistemleri (sabit katsayılı)

Bağımsız değişken ile bu değişkenin n tane bilinmeyen fonksiyonunun ve bunların herhangi mertebeye kadar türevlerinin oluşturduğu bağıntılar topluluğuna n bilinmeyenli diferansiyel denklem sistemi denir.

Mertebe: Bir diferansiyel denklem sisteminde herbir bilinmeyenin en yüksek türev mertebelerinin toplamı sistemin mertebesini verir.

$$F_1\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny_1}{dx^n}\right) = 0 \longrightarrow \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dy_2}{dx} + y_1 = 0$$

$$F_2\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}, \frac{d^2y_2}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny_2}{dx^n}\right) = 0 \longrightarrow \frac{d^2y_2}{dx^2} - 3\frac{dy_1}{dx} + 5y_1 = \sin x$$

$\vdots$

$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dy_2}{dx} + y_1 = 0 \\ \frac{d^2y_2}{dx^2} - 3\frac{dy_1}{dx} + 5y_1 = \sin x \end{array}\right\}$ Dif. denk. sist. mertebesi 4

$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} - y_2 = 0 \\ \frac{dy_2}{dx} + y_1 = e^x \end{array}\right\}$ mertebesi 3

Bir dif. denklem sisteminde bilinmeyen fonksiyon sayısı denklem sayısına eşitse ve her denklem bilinmeyen fonksiyonlardan birinin en yüksek mertebeli türevine göre çözülmüşse kanonik sistem, bu kanonik sistemde yalnız 1. mertebeden türevler bulunuyorsa sisteme Normal sistem denir. Eğer sistemde bağımsız değişkenli ifadeler yoksa sisteme Homojen sistem denir.

- $$\frac{dy}{dx} = -5y - z + 1$$
  $$\frac{dz}{dx} = y - 3z + e^{2x}$$

2 bilinmeyenli, homojen olmayan normal sistem

Mertebe: 2

- $$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y + 3z + e^{2x}$$
  $$\frac{d^2z}{dx^2} = -2z - y$$

2 bilinmeyenli, homojen olmayan kanonik sistem

Mertebe: 4

- $$\frac{dy}{dx} = -5y - z$$
  $$\frac{dz}{dx} = y - 3z$$

2 bilinmeyenli homojen normal sistem

Mertebe: 2

Çözüm Yöntemleri

1°) Türetme - Yoketme Yöntemi

Sistemin denklemleri türetilerek ve bilinmeyen fonksiyonlardan biri hariç diğer bütün fonksiyonlar yok edilmek suretiyle bilinmeyen bir tek fonksiyonun dif. denklemi elde edilir. Bu denklem ile sistemin çözümleri bulunur.

Ör/

$$\frac{dy}{dx} = -5y - z + 1 + x^2 \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = y - 3z + e^{2x} \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} + 2x \quad (3)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 3\frac{dz}{dx} + 2e^{2x} \quad (4)$$

2'yi 3'te yerine yazalım;

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - \left[y - 3z + e^{2x}\right] + 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - y + 3z - e^{2x} + 2x \quad (5)$$

1'den z'i çekelim;

$$z = -5y - \frac{dy}{dx} + 1 + x^2 \quad (6)$$

6'yı 5'te yerine yazalım;

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{dy}{dx} - y + 3\left[-5y - \frac{dy}{dx} + 1 + x^2\right] - e^{2x} + 2x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 3 + 3x^2 - e^{2x} + 2x}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 3 + 3x^2 - e^{2x} + 2x}$$

$$y'' + 8y' + 16y = \underbrace{3x^2 + 2x + 3}_{} - e^{2x}$$

$$\text{K.D}: \ r^2 + 8r + 16 = 0$$

$$(r+4)^2 = 0$$

$$r_{1,2} = -4$$

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-4x}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{ö1} &= ax^2 + bx + c \\ y'_{ö1} &= 2ax + b \\ y''_{ö1} &= 2a \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &2a + 8(2ax+b) + 16(ax^2 + bx + c) \equiv 3x^2 + 2x + 3 \\ &16ax^2 + (16a + 16b)x + (2a + 8b + 16c) \equiv 3x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

$$16a = 3 \qquad 16a + 16b = 2 \qquad 2a + 8b + 16c = 3$$

$$a = \frac{3}{16} \qquad b = -\frac{1}{16} \qquad c = \frac{1}{16}\left(3 + \frac{1}{8}\right) = \frac{25}{128}$$

$$y_{ö1} = \frac{3x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{25}{128}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{ö2} &= Ae^{2x} \\ y'_{ö2} &= 2Ae^{2x} \\ y''_{ö2} &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \quad 4Ae^{2x} + 16Ae^{2x} + 16Ae^{2x} \equiv -e^{2x}$$

$$36Ae^{2x} \equiv -e^{2x} \Rightarrow A = -\frac{1}{36} \Rightarrow y_{ö2} = \frac{-e^{2x}}{36}$$

$$\boxed{y_{G.Ç} = (c_1 + c_2 x)e^{-4x} + \frac{3x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{25}{128} - \frac{e^{2x}}{36}}$$

7

$$\boxed{y_{G.Ç} = (c_1 + c_2 x) e^{-4x} + \frac{3x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{25}{128} - \frac{e^{2x}}{36}} \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dx} = c_2 e^{-4x} - 4(c_1 + c_2 x) e^{-4x} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{16} - \frac{e^{2x}}{18} \quad (8)$$

(7) ve (8), (6)'da yerine yazılırsa

$$z = -5\left[(c_1 + c_2 x)e^{-4x} + \frac{3x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{25}{128} - \frac{e^{2x}}{36}\right] - \left[c_2 e^{-4x} - 4(c_1 + c_2 x)e^{-4x} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{16} - \frac{e^{2x}}{18}\right] + 1 + x^2$$

$$z = -5c_1 e^{-4x} - 5c_2 x e^{-4x} - \frac{15x^2}{16} + \frac{5x}{16} - \frac{125}{128} + \frac{5e^{2x}}{36} - c_2 e^{-4x} + 4c_1 e^{-4x} + 4c_2 x e^{-4x} - \frac{3x}{8} + \frac{1}{16} + \frac{e^{2x}}{18} + 1 + x^2$$

$$\boxed{z = (-c_1 - c_2) e^{-4x} - c_2 x e^{-4x} + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{16} + \frac{11}{128} + \frac{7}{36} e^{2x}} \quad (9)$$

(7) ve (9) sistemin çözümleridir.

Ör/
$$\left.\begin{aligned} (1)\ \frac{dx}{dt} &= x - 5y + te^t \\ (2)\ \frac{dy}{dt} &= x + 7y + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$ dif. denklem sistemini çözünüz.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 5\frac{dy}{dt} + e^t + te^t \quad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 7\frac{dy}{dt} \quad (4)$$

① 'i ④ 'te yerine yazalım;

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x - 5y + te^t + \frac{7dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} + 5y = x + te^t \quad (5)$$

② 'den x 'i çekelim.

$$x = \frac{dy}{dt} - 7y - \frac{1}{2} \quad (6)$$

⑥ 'yı ⑤ 'te yerine yazalım;

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} + 5y = \frac{dy}{dt} - 7y - \frac{1}{2} + te^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 12y = -\frac{1}{2} + te^t$$

K.D: $r^2 - 8r + 12 = 0$

$$(r-6)(r-2) = 0$$

$$r_1 = 6 \quad r_2 = 2$$

$$y_h = c_1 e^{6t} + c_2 e^{2t}$$

$$y_{ö1} = a \quad y_ö' = y_ö'' = 0$$

$$12a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{-1}{24} \Rightarrow y_{ö1} = -\frac{1}{24}$$

$$y_{ö2} = (at+b).e^t$$

$$y_{ö2}' = ae^t + (at+b)e^t$$

$$y_{ö2}'' = 2ae^t + (at+b)e^t$$

$$\Rightarrow 2ae^t + (at+b)e^t - 8ae^t - 8(at+b)e^t + 12(at+b)e^t \equiv te^t$$

$$5(at+b) - 6a \equiv t$$

$$5at + (5b - 6a) \equiv t$$

$$5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \qquad 5b - 6a = 0$$

$$b = \frac{6}{25} \Rightarrow y_{ö2}\left(\frac{t}{5} + \frac{6}{25}\right)e^t$$

$$y_{GG} = c_1 e^{6t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{24} + \left(\frac{t}{5} + \frac{6}{25}\right)e^t \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = 6c_1 e^{6t} + 2c_2 e^{2t} + \frac{1}{5}e^t + \left(\frac{t}{5} + \frac{6}{25}\right)e^t \quad (8)$$

(8)'i (6)'da yerine yazarsak;

$$x = 6c_1 e^{6t} + 2c_2 e^{2t} + \frac{e^t}{5} + \left(\frac{t}{5} + \frac{6}{25}\right)e^t - 7\left[c_1 e^{6t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{24} + \left(\frac{t}{5} + \frac{6}{25}\right)e^t\right] - \frac{1}{2}$$

$$= -c_1 e^{6t} - 5c_2 e^{2t} + \left[\frac{1}{5} + \frac{6}{25} - \frac{42}{25}\right]e^t + \left[\frac{t}{5} - \frac{7t}{5}\right]e^t - \frac{5}{24}$$

$$x = -c_1 e^{6t} - 5c_2 e^{2t} - \frac{31}{25}e^t - \frac{6t}{5}e^t - \frac{5}{24} \quad (9)$$

(7) ve (9) sistemin çözümleridir.

Öd/

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 4x - 2\frac{dx}{dt} + y + e^t \\ \frac{dx}{dt} &= -3x - y \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

2. Operatör Yöntemi

$$\frac{d}{dx} = D$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -5y - z + 1 + x^2 \\ \frac{dz}{dx} &= y - 3z + e^{2x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} Dy &= -5y - z + 1 \\ Dz &= y - 3z + e^{2x} \end{aligned} \quad \left.\begin{aligned} (D+5)\,y + z &= 1 + x^2 \\ -y + (D+3)\,z &= e^{2x} \end{aligned}\right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D+5 & 1 \\ -1 & D+3 \end{vmatrix} = D^2 + 8D + 15 + 1$$

$$= \underline{\underline{D^2 + 8D + 16}}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1+x^2 & 1 \\ e^{2x} & D+3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} D+5 & 1+x^2 \\ -1 & e^{2x} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$(D^2 + 8D + 16)\,y = (D+3)(1+x^2) - e^{2x}$$

$$(D^2 + 8D + 16)\,y = 2x + 3 + 3x^2 - e^{2x}$$

$$D^2 z + 8Dz + 16z = (D+5)e^{2x} + 1 + x^2$$

$$(D^2 + 8D + 16)\,z = 2e^{2x} + 5e^{2x} + 1 + x^2$$

$$= 7e^{2x} + 1 + x^2$$