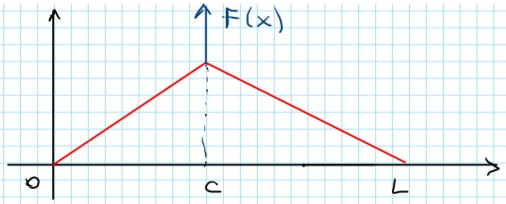
$$-\tau \frac{d^2y}{dx^2} = F(x) \qquad 0 \le x \le L$$
$$y(0) = 0$$
$$y(L) = 0 \qquad (6)$$



Sınır değer problemi; x uzunluğundaki bir telin sabit gerilimi τ ve telin bir bölümüne uygulanan kuvvet $F(x)$ olmak üzere telin denge durumundan sapma miktarını ifade eder.

Örneğin;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 1 & x = \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad \text{olsun.} \qquad (7)$$

$$-\tau \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \text{k.D: } -\tau r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0 \Rightarrow y = c_1x + c_2$$

$$y(x) = \begin{cases} Ax + B & 0 < x < \frac{L}{2} \\ Cx + D & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Sınır şartlarını sağlatalım;

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = A.0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow 0 = CL + D \Rightarrow D = -CL$$

$$y(x) = \begin{cases} Ax & 0 \le x < \frac{L}{2} \\ C(x-L) & \frac{L}{2} < x \le L \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{L}{2}^-} y = \lim_{x \to \frac{L}{2}^+} y \Rightarrow \frac{AL}{2} = C\left(\frac{L}{2} - L\right) \Rightarrow \frac{AL}{2} = \frac{-CL}{2} \Rightarrow C = -A$$

$$y(x) = \begin{cases} Ax & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ A(L-x) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Bu çözümdeki A sabiti $F(x)$ kuvvetinin büyüklüğüne göre hesaplanır. Herhangi bir noktada integral alma işlemi yapılamayacağından (6) diferansiyel denklemini çözerken $F(x)$'in $(0, \frac{L}{2})$, $(\frac{L}{2}, L)$ aralıklarındaki değerlerini gözönüne alırız. $F(x)$ kuvvetini tel boyunca yayarak problemi çözdüğümüzde, tek bir noktadaki kuvveti hesaplamak için yayılan kuvvet bir noktadaki kuvvete yanaşacak şekilde limit alırız. Bu durumda (6) problemi L uzunluğundaki bir telin $\frac{L}{2}$ orta noktasında tele uygulanan kuvvet miktarı için (7) ile tanımlanan $F(x)$'i ifade eder.

$F(x)$ birçok şekilde tanımlanabilir, ancak tüm $F(x)$'ler için

$$\int_0^L F(x)\,dx = 1 \qquad (8)$$

sağlanmalıdır.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{L+\varepsilon}{2} < x < L \end{cases}$$

$$\int_0^L F(x)\,dx = \int_{\frac{L-\varepsilon}{2}}^{\frac{L+\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon}\,dx = \frac{x}{\varepsilon}\Big|_{\frac{L-\varepsilon}{2}}^{\frac{L+\varepsilon}{2}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{L+\varepsilon}{2} - \frac{L-\varepsilon}{2}\right) = 1$$

$$-\sigma \frac{d^2y}{dx^2} = F(x) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sigma}\begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{L+\varepsilon}{2} < x < L \end{cases}$$

$$y(x) = -\frac{1}{\sigma}\begin{cases} Ax+B & 0 < x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x^2}{2\varepsilon}+Cx+D & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ Ex+F & \frac{L+\varepsilon}{2} < x < L \end{cases}$$

Sınır şartlarını sağlayalım;

$$\left.\begin{aligned} y(0)=0 &\Rightarrow 0 = -\frac{1}{\sigma}(A.0+B) \Rightarrow B=0 \\ y(L)=0 &\Rightarrow 0 = -\frac{1}{\sigma}(EL+F) \Rightarrow F=-EL \end{aligned}\right\} y(x) = -\frac{1}{\sigma}\begin{cases} Ax & 0 < x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x^2}{2\varepsilon}+Cx+D & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ E(x-L) & \frac{L+\varepsilon}{2} < x < L \end{cases} \qquad (9)$$

y ve y''nün $x=\frac{L-\varepsilon}{2}$ ve $x=\frac{L+\varepsilon}{2}$ noktalarında sürekli oldukları gözönüne alınırsa;

- $A.\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}\cdot\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right)^2 + C.\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) + D \Rightarrow (A-C)\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) = \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} + D$

- $\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right)^2 + C.\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) + \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} = E\left(\frac{L+\varepsilon}{2} - L\right) \Rightarrow \frac{1}{8\varepsilon}\left[(L+\varepsilon)^2 + (L-\varepsilon)^2\right] + C\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) = E\left(\frac{\varepsilon-L}{2}\right)$

$$y'(x) = -\frac{1}{\delta}\begin{cases} A & 0 \le x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x}{\varepsilon} + C & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ E & \frac{L+\varepsilon}{2} < x \le L \end{cases}$$

- $$A = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) + C \Rightarrow A - C = \frac{L-\varepsilon}{2\varepsilon}$$

$$(A-C)\cdot\left(\frac{L-\varepsilon}{2}\right) = \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} + D$$

$$\Rightarrow D = \frac{(L-\varepsilon)^2}{4\varepsilon} - \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} \Rightarrow \boxed{D = \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon}}$$

- - $$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) + C = E$$

$$\frac{1}{8\varepsilon}\left[(L+\varepsilon)^2 + (L-\varepsilon)^2\right] + C\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) = E\left(\frac{\varepsilon-L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8\varepsilon}\left[(L+\varepsilon)^2 + (L-\varepsilon)^2\right] + C\cdot\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) = \left(\frac{\varepsilon-L}{2}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{L+\varepsilon}{2}\right) + C\right]$$

$$C\left[\frac{L+\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon-L}{2}\right] = -\frac{1}{4\varepsilon}(L^2-\varepsilon^2) - \frac{1}{8\varepsilon}\left[L^2 + \cancel{2L\varepsilon} + \varepsilon^2 + L^2 - \cancel{2L\varepsilon} + \varepsilon^2\right]$$

$$CL = -\frac{1}{4\varepsilon}(L^2-\varepsilon^2) - \frac{1}{4\varepsilon}(L^2+\varepsilon^2)$$

$$cL = -\frac{1}{4\varepsilon}(L^2-\varepsilon^2) - \frac{1}{4\varepsilon}(L^2+\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow cL = \frac{-1}{4\varepsilon}\left[2L^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{-L}{2\varepsilon}} \Rightarrow A - C = \frac{L-\varepsilon}{2\varepsilon} \Rightarrow A + \frac{L}{2\varepsilon} = \frac{L-\varepsilon}{2\varepsilon}$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{2}}$$

$$E = C + \frac{L+\varepsilon}{2\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{-L}{2\varepsilon} + \frac{L+\varepsilon}{2\varepsilon} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}}$$

$x = \frac{L}{2}$

$$\frac{L^2}{8\varepsilon} - \frac{L^2}{4\varepsilon} + \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon}$$

$$\cancel{\frac{L^2}{8\varepsilon}} - \cancel{\frac{L^2}{\underset{(\cdot 2)}{4\varepsilon}}} + \cancel{\frac{L^2}{8\varepsilon}} - \frac{2L\cancel{\varepsilon}}{8\cancel{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon^{\cancel{2}}}{8\cancel{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{6}\begin{cases} -\frac{x}{2} & 0 \le x \le \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x^2}{2\varepsilon} - \frac{Lx}{2\varepsilon} + \frac{(L-\varepsilon)^2}{8\varepsilon} & \frac{L-\varepsilon}{2} \le x \le \frac{L+\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{2}(x-L) & \frac{L+\varepsilon}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(x) = -\frac{1}{6}\begin{cases} -\frac{x}{2} & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{4} & x = \frac{L}{2} \\ \frac{x-L}{2} & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\tau} & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\[2mm] \dfrac{L-x}{2\tau} & \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \qquad (10)$$

$$y(x) = \frac{1}{L\tau}\int_0^x T(L-x)F(T)\,dT + \frac{1}{L\tau}\int_x^L x(L-T)F(T)\,dT$$

$$g(x;T) = \begin{cases} \dfrac{T(L-x)}{L\tau} & 0 \le T \le x \\[2mm] \dfrac{x(L-T)}{L\tau} & x \le T \le L \end{cases} \qquad (11)$$

olarak alırsak;

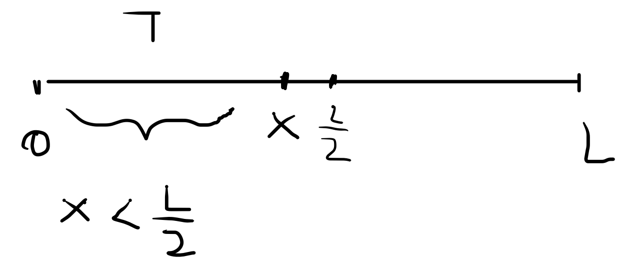
$$y(x) = \int_0^L \underbrace{g(x,T)} \cdot F(T)\,dT \qquad (12)$$

fonksiyonuna (6) probleminin Green fonksiyonu denir.

Green fonksiyonu $g(x;T)$, $F(x)$'e bağlı değildir, sınır şartlarına ve diferansiyel operatöre bağlıdır. $g(x;T)$ bilindiğinde problemin çözümü (12) bağıntısıyla $F(x)$ değerine bağlı olarak bulunur. Sınır şartlarının homojen olup olmamasına bağlı olarak Green fonksiyonu cinsinden çözüm değişecektir.

(11) ile bulunan $g(x;T)$ Green fonksiyonu x parametresine ve T bağımsız değişkenine bağlıdır. Green fonksiyonu simetriktir yani x ve T yer değiştirirse T parametresi ve x bağımsız değişkeni için

$$g(x;T) = \begin{cases} \dfrac{x(L-T)}{L\tau} & 0 \leq x \leq T \\ \dfrac{T(L-x)}{L\tau} & T \leq x \leq L \end{cases} \qquad (13)$$



eşitliği elde edilir.

Bu son bağıntıyla elde edilen Green fonksiyonu için belirtilecek olan üç özellik tüm Green fonksiyonları için geçerlidir.

1) $g(x;T)$ tüm $x=T$ noktalarında süreklidir.

2) $g(x;T)$'nin x değişkenine göre türevi $x \neq T$ noktalarında sürekli ve $x=T$ için

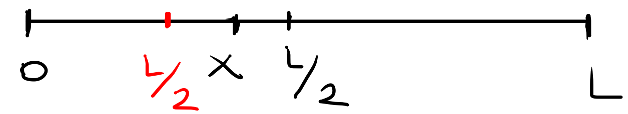
$$\lim_{x \to T^+} \frac{\partial g}{\partial x} - \lim_{x \to T^-} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{\tau}$$ dur.

3) $g(x;T)$ her $x \neq T$ için diferansiyel denklemin homojen kısmını ve sınır şartlarını sağlar.

(6) denkleminde $F(x)=\delta(x-\frac{L}{2})$ almak suretiyle çözümün nasıl olacağını araştıralım;

$$y(x)=\int_0^L g(x;T)\cdot F(T)\,dT$$

$$\delta\left(T-\frac{L}{2}\right)=\begin{cases}\infty & T=\frac{L}{2}\\ 0 & T\neq\frac{L}{2}\end{cases}$$



$$\Rightarrow y(x)=\int_0^L g(x;T)\cdot\delta\left(T-\frac{L}{2}\right)dT$$

$$=\underbrace{\int_0^x \frac{T(L-x)}{L\tau}\cdot\delta\left(T-\frac{L}{2}\right)dT}_{x<\frac{L}{2}} + \underbrace{\int_x^L \overbrace{\frac{x(L-T)}{L\tau}}^{g(x,T)}\delta\left(T-\frac{L}{2}\right)dT}_{x<\frac{L}{2}\ \text{için}} = \begin{cases}\dfrac{x}{2\tau} & 0\le x\le \frac{L}{2}\\[2mm] \dfrac{L-x}{2\tau} & \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$$

sınırın dışında kalır bu integral sıfır olur.

integral $g(x;\frac{L}{2})$'ye eşittir.

$x>\frac{L}{2}$ için integral $g(x;\frac{L}{2})$

$x>\frac{L}{2}$ için $\frac{L}{2}$ sınırın dışında kaldığından integral sıfırdır.

ör/

$$y'' + y = F(x) \quad 0 < x < L$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(L) = 0$$

sınır değer problemi için

a) sabitin değişimi yöntemini kullanarak çözümün

$$y(x) = \int_0^L g(x;T)\, F(T)\, dT$$

şeklinde olduğunu gösteriniz.

b) Bulduğunuz Green fonksiyonunun Green fonksiyonu özelliklerini sağladığını gösteriniz.

a) $y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0$

$r_{1,2} = \mp i$

$y = A\cos x + B\sin x$

$A = A(x) \qquad B = B(x)$

$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x$

$\sin x \,/\; A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \;/\; \cos x$

$\cos x \,/\; -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = F(x) \;/\; -\sin x$

$B'(x) = F(x)\cos x \qquad A'(x) = -\sin x \cdot F(x)$

$B(x) = \int_0^x F(t)\cos t\, dt + B \qquad A(x) = -\int_0^x F(t)\cdot \sin t\, dt + A$

$$\Rightarrow y(x) = \left[-\int_0^x F(t).\sin t\,dt + A\right]\cos x + \left[\int_0^x F(t)\cos t\,dt + B\right]\sin x$$

$$y(x) = -\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt + \sin x\int_0^x F(t)\cos t\,dt + A\cos x + B\sin x$$

$$= \int_0^x (\sin x\cos t - \cos x\sin t)\,F(t)\,dt + A\cos x + B\sin x$$

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\,F(t)\,dt + A\cos x + B\sin x$$

$$y'(x) = \int_0^x \cos(x-t)\,F(t)\,dt - A\sin x + B\cos x$$

$$y(0)=0 \Rightarrow 0 + A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \Rightarrow A=0$$

$$y'(L)=0 \Rightarrow \int_0^L \cos(L-t)\,F(t)\,dt + B\cos L = 0 \Rightarrow B = \frac{-1}{\cos L}\int_0^L \cos(L-t)\,F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\,F(t)\,dt - \frac{\sin x}{\cos L}\int_0^L \cos(L-t)\,F(t)\,dt$$

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)F(t)\,dt - \frac{\sin x}{\cos L}\int_0^L \cos(L-t)F(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\cos L}\left[\int_0^x \cos L \cdot \sin(x-t)\,F(t)\,dt - \int_0^L \sin x \cdot \cos(L-t)\,F(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\cos L}\left[\int_0^x \underbrace{\cos L}_{b} \cdot \sin(\underbrace{x-t}_{a})\,F(t)\,dt - \int_0^x \underbrace{\sin x}_{a} \cos(\underbrace{L-t}_{b})F(t)\,dt - \int_x^L \sin x \cos(L-t)F(t)\,dt\right]$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$= \frac{1}{\cos L}\left[\int_0^x \frac{1}{2}\left[\sin(x-t+L) + \sin(x-t-L)\right]F(t)\,dt - \int_0^x \frac{1}{2}\left[\sin(x+L-t) + \sin(x-L+t)\right]F(t)\,dt\right.$$
$$\left. - \int_x^L \sin x \cos(L-t)\,F(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\cos L}\left[\int_0^x \frac{1}{2}\left[\sin(x-t+L)+\sin(x-t-L)\right]F(t)\,dt - \int_0^x \frac{1}{2}\left[\sin(x+L-t)+\sin(x-L+t)\right]F(t)\,dt \right.$$

$$\left. - \int_x^L \sin x \cos(L-t)\,F(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\cos L}\int_0^x \left[\cancel{\sin(x-t+L)}+\sin(x-t-L)-\cancel{\sin(x+L-t)}-\sin(x-L+t)\right]F(t)\,dt - \frac{1}{\cos L}\int_x^L \sin x\cos(L-t)F(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\cos L}\int_0^x \left[\underbrace{\sin(x-t-L)-\sin(x-L+t)}_{\underbrace{\sin[(x-L)-t]-\sin[(x-L)+t]}_{-2\cos(x-L)\sin t}}\right]F(t)\,dt - \frac{1}{\cos L}\int_x^L \sin x\cos(L-t)\,F(t)\,dt$$

$$= \frac{-1}{\cos L}\int_0^x \sin t\cos(x-L)\quad F(t)\,dt - \frac{1}{\cos L}\int_x^L \sin x\cdot\cos(L-t)F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow g(x,t) = \frac{1}{\cos L}\begin{cases} -\sin t\cdot\cos(x-L) & 0\le t\le x \\ -\sin x\cos(L-t) & x\le t\le L\end{cases} = -\frac{1}{\cos L}\begin{cases}\sin t\cos(L-x) & 0\le t\le x \\ \sin x\cos(L-t) & x\le t\le L\end{cases}$$

$$y(x)=\int_0^L g(x,t).F(t)\,dt$$

b) $g(x;\cancel{t})=\dfrac{-1}{\cos L}\begin{cases}\sin t\cos(L-x) & 0\leq t\leq x\\ \sin x\cos(L-t) & x\leq t\leq L\end{cases} \Rightarrow g(x;t)=\dfrac{-1}{\cos L}\begin{cases}\sin x\cos(L-t) & 0\leq x\leq t\\ \sin t\cos(L-x) & t\leq x\leq L\end{cases}$

- $g(x;T)$ $\forall\, x=t$ için sürekli olmalı.

Green fonksiyonu sin ve cos fonksiyonlarını içerdiğinden ve bu fonksiyonlar her yerde tanımlı ve sürekli olduğundan $g(x;t)$ Green fonksiyonu tüm x'ler için süreklidir.

- $\forall\, x\neq t$ için türevi sürekli ve $\lim\limits_{x\to t^+}\dfrac{dg}{dx}-\lim\limits_{x\to t^-}\dfrac{dg}{dx}=1$ olmalı.

$$\frac{dg}{dx}=-\frac{1}{\cos L}\begin{cases}\cos x\cos(L-t) & 0\leq x\leq t\\ \sin t\sin(L-x) & t\leq x\leq L\end{cases}$$

$$-\frac{1}{\cos L}\left\{\lim_{x\to t^+}\left[\sin t\sin(L-x)\right]-\lim_{x\to t^-}\left[\cos x\cos(L-T)\right]\right\}=\left\{\sin t\sin(L-t)-\cos t\cos(L-T)\right\}\left(\frac{-1}{\cos L}\right)$$

$$=-\cos(\cancel{t}+L-\cancel{t})\cdot\left(-\frac{1}{\cos L}\right)=1$$

- $y'' + y = 0$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = -\frac{1}{\cos L}\begin{cases} -\sin x \cos(L-t) & 0 \le x \le t \\ -\sin t \cos(L-x) & t \le x \le L \end{cases}$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + g = \left[-\frac{1}{\cos L}\begin{cases} -\sin x \cos(L-t) & 0 \le x \le t \\ -\sin t \cos(L-x) & t \le x \le L \end{cases}\right] + \left[-\frac{1}{\cos L}\begin{cases} \sin x \cos(L-t) & 0 \le x \le t \\ \sin t \cos(L-x) & t \le x \le L \end{cases}\right]$$

$$= 0$$

Adi Diferansiyel Denklemler İçin Green Fonksiyonları

$P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları $\alpha \le x \le \beta$ aralığında sürekli kabul edilmek üzere

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = f(x) \qquad \alpha < x < \beta$$

ikinci mertebeden lineer adi dif. denklemi ile Green fonksiyonu arasında ilişki kuralım.

$P(x) \neq 0$ olmak üzere her terimi $P(x)$ ile bölelim

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{R(x)}{P(x)}y = \frac{f(x)}{P(x)}$$

$e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx}$ ile her terimi çarpalım

$$\underbrace{e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q(x)}{P(x)} \cdot e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx} \cdot \frac{dy}{dx}} + \frac{R(x)}{P(x)} \cdot e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx} y = e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx} \cdot \frac{f(x)}{P(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx} \cdot \frac{dy}{dx}\right] + \frac{R(x)}{P(x)} \cdot e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx} y = \frac{f(x)}{P(x)} \cdot e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx}$$

$$\left.\begin{aligned} & e^{\int \frac{a_1}{p} dx} = p(x) \\ & \frac{R(x)}{p(x)} \cdot e^{\int \frac{a}{p} dx} = q(x) \\ & \frac{f(x)}{p(x)} \cdot e^{\int \frac{a}{p} dx} = F(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx}\left[p(x) \cdot \frac{dy}{dx}\right] + q(x)\, y = F(x)}_{\text{Verilen dif. denk 'in kendine eş denklemi}} \qquad (p(x) > 0) \quad (14)$$

Bu son eşitliğin sol tarafını operatörle ifade edersek;

$$L := \frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

$$Ly = F(x) \qquad \alpha < x < \beta \qquad (15)$$

olur. Denklemin tek çözümü vardır. Bu denkleme ek olarak iki sınır şartının sağlanması gerekir.

karışık olmayan sınır şartları
$$\begin{cases} B_1 y := -l_1 y'(\alpha) + h_1 y(\alpha) = m_1 \\ B_2 y := l_2 y'(\beta) + h_2 y(\beta) = m_2 \end{cases} \qquad (l_1, l_2, h_1, h_2, m_1, m_2 \to sbt) \quad (16)$$

- $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0 \Rightarrow$ homojen olmayan sınır şartı

  $m_1 = 0 = m_2 \Rightarrow$ homojen sınır şartları

- $$\left.\begin{aligned} y(\alpha) &= y(\beta) \\ y'(\alpha) &= y'(\beta) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

  karışık sınır şartı
  veya
  periyodik sınır şartı

Not: Periyodik sınır şartları $p(x)$ katsayısının α ve β noktalarındaki değerlerinin birbirine eşit olması durumunda söz konusu olurlar.

$$y(\alpha) - y(\beta) = 0$$
$$y'(\alpha) - y'(\beta) = 0$$

L operatörünü gözönüne alırsak;

$$L := \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) = \underbrace{\frac{dp}{dx}}_{P_1} \cdot \frac{d}{dx} + \underbrace{p(x)}_{P_0} \cdot \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{q(x)}_{P_2}$$

$$= P_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + P_1(x)\frac{d}{dx} + P_2 \qquad (18)$$

şeklinde yazılabilir.

$\alpha \le x \le \beta$ aralığında P_0'', P_1', P_2 sürekli kabul edilsin. Eğer $u(x)$ ve $v(x)$ $\alpha \le x \le \beta$ aralığında sürekli, türeve sahip ve ikinci mertebe türevleri de parçalı sürekli herhangi iki fonksiyon ise

$$\int_\alpha^x v.Lu\,dx = \int_\alpha^x v.\left[P_0u'' + P_1u' + P_2u\right]dx$$

$$= \int_\alpha^x \left[(P_0v)u'' + (P_1v)u' + (P_2v)u\right]dx \qquad (49)$$

$P_0v = t \qquad u''dx = ds$

$(P_0v)'.dx = dt \qquad u' = s$

$$= \int_\alpha^x (P_0v)u''\,dx + \int_\alpha^x (P_1v)u'\,dx + \int_\alpha^x (P_2v)u\,dx$$

$P_1v = t \qquad u'dx = ds$

$(P_1v)'dx = dt \qquad u = s$

$$= \left[u'(P_0v)\Big|_\alpha^x - \int_\alpha^x u'(P_0v)'dx\right] + u(P_1v)\Big|_\alpha^x - \int_\alpha^x (P_1v)'.u\,dx + \int_\alpha^x (P_2v)u\,dx$$

$(P_0v)' = t \qquad u'dx = ds$

$(P_0v)''dx = dt \qquad u = ds$

$$\left[(P_0v)u' - (P_0v)'u + (P_1v)u\Big|_\alpha^x\right] + \int_\alpha^x \underbrace{\left[(P_0v)'' - (P_1v)' + P_2v\right]}_{L^*v}.u\,dx$$