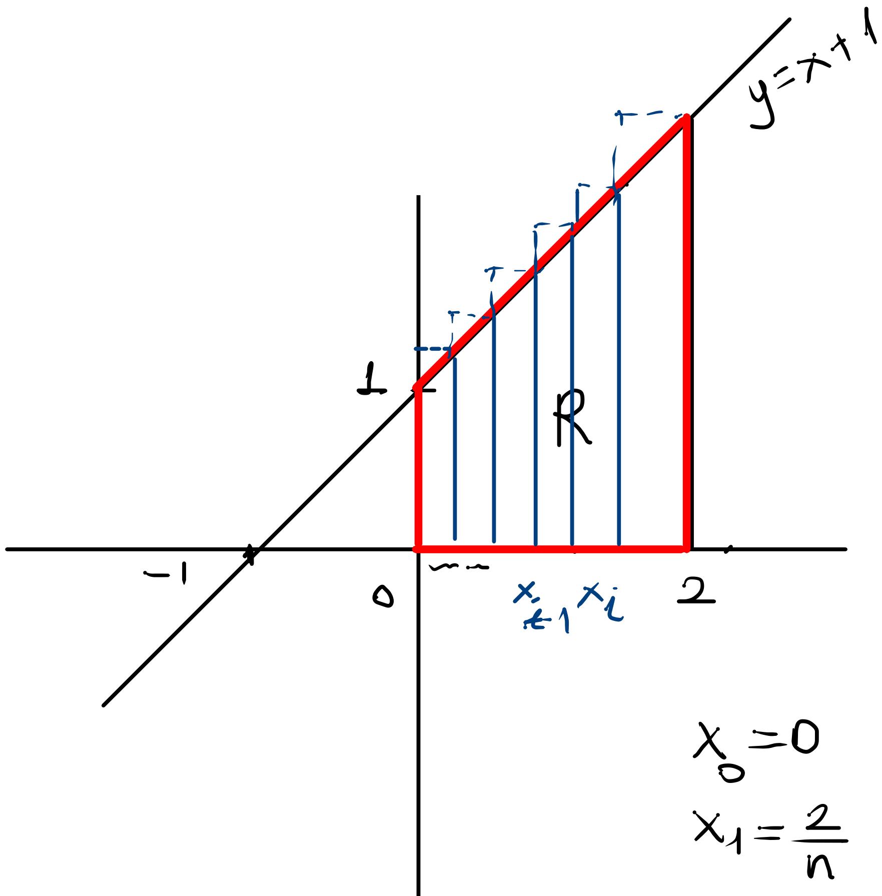
Ör/ $y=x+1$ doğrusu altında ve x-ekseninin üzerinde kalan, $x=0$ ve $x=2$ doğruları arasındaki bölgenin alanını bulunuz.



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(i\cdot\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{2}{n}+1\right)$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{4}{\cancel{n^2}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \frac{2}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}$$

$$S_n = \frac{2(n+1)}{n} + 2$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[2\cdot\frac{(n+1)}{n}+2\right]$$

$$= 4$$

$$\Delta x_i = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{2}{n}$

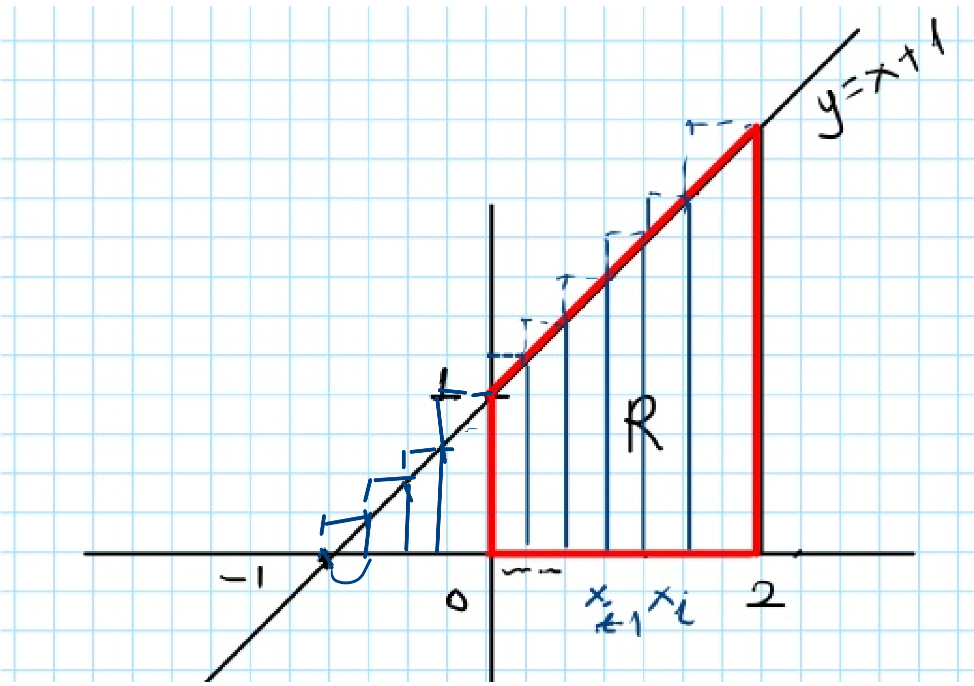
$x_2 = 2\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n}$

$\vdots$

$x_n = n\cdot\frac{2}{n} = 2$

$x_i = i\cdot\frac{2}{n}$

Aynı soru $[-1, 2]$ aralığı için incelenseydi.



$$\Delta x_i = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 + \frac{3}{n}$$

$$x_2 = -1 + 2 \cdot \frac{3}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_n = -1 + \cancel{n} \cdot \frac{3}{\cancel{n}} = 2$$

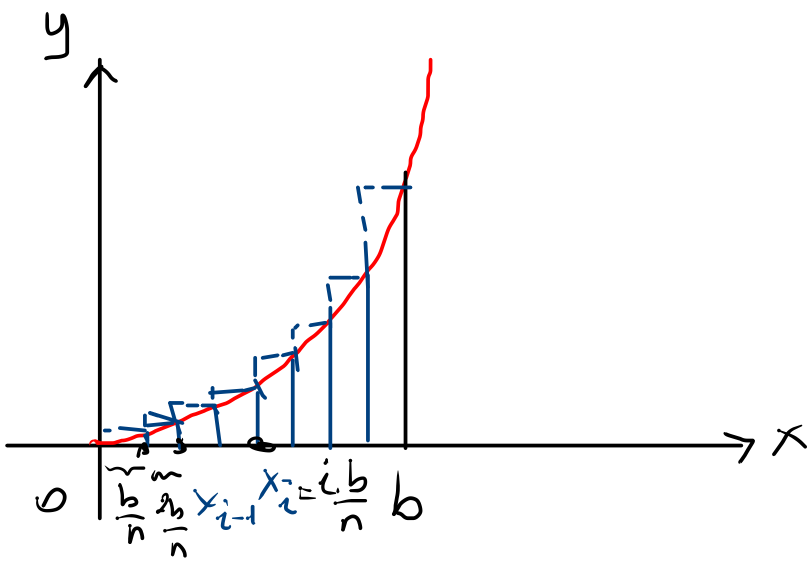
$$x_i = -1 + i \cdot \frac{3}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\cancel{-1} + i\frac{3}{n} \cancel{+1}\right] \cdot \frac{3}{n}$$

$$= \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{9}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{9}{2}$$

Ör/ $y=x^2$ parabolü ve $y=0$, $x=0$, $x=b$ $(b>0)$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(i.\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x_i = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = \frac{b}{n} \\ x_2 = 2\frac{b}{n} \\ \vdots \\ x_n = n.\frac{b}{n} = b \end{array}\right\} x_i = i.\frac{b}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{b^3}{3}$$

Riemann Toplamları

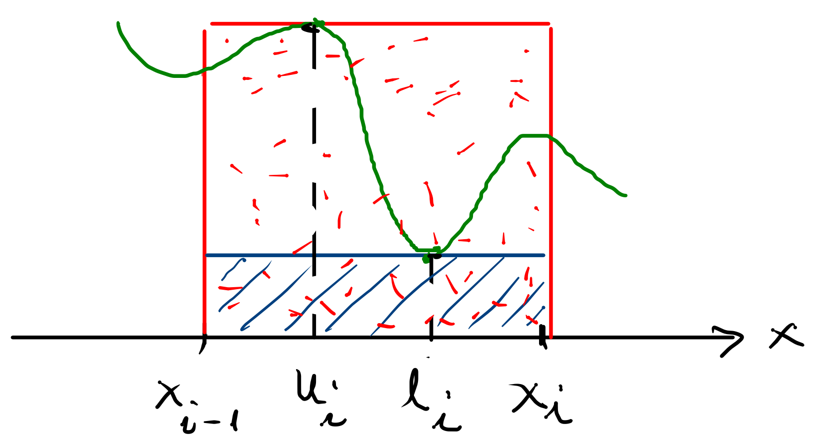
P kümesi reel eksende a ile b arasında sıralı, sonlu sayıdaki noktaların bir kümesi olsun.

$$P=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$$

Bu kümeye $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü (bölümü) denir.

$[x_{i-1}, x_i]$ alt aralıklarına P bölümünün alt aralıkları denir.
$(1\leq i\leq n)$



$[x_{i-1}, x_i]$ aralığı kapalı ve sonlu bir aralık ve de fonksiyon bu aralıkta sürekli olduğu için bu aralıkta mutlak maksimum ve mutlak minimum değeri vardır. (Max-min teo)

O halde $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında

$$f(l_i)\leq f(x)\leq f(u_i)$$

olacak şekilde l_i ve u_i sayıları vardır.

Eğer $[a,b]$ üzerinde $f(x) \geq 0$ ise o zaman $f(l_i).\Delta x_i$ ve $f(u_i).\Delta x_i$ sayıları, tabanları $[x_{i-1}, x_i]$ aralığı ve tepeleri ise f in bu aralıktaki grafiğinin üzerindeki sırasıyla en alt ve en üst noktalarından geçen dikdörtgenlerin alanlarını temsil eder.

Eğer A_i, $y=f(x)$ grafiğinin altında, x-ekseninin üzerinde ve $x=x_{i-1}$, $x=x_i$ doğruları arasında kalan alanı gösteriyorsa o zaman

$$f(l_i).\Delta x_i \leq A_i \leq f(u_i).\Delta x_i$$

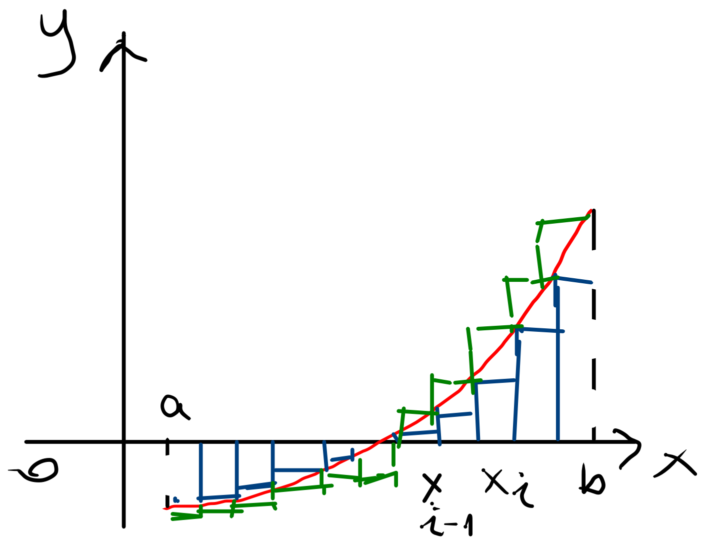
olur. (Eğer f negatif olursa o zaman $f(l_i).\Delta x_i$ ve $f(u_i).\Delta x_i$'nin biri veya her ikisi negatif olabilir. O zaman bunlar x-ekseninin altında kalan dikdörtgenin alanının negatifini temsil edeceklerdir)

Alt Riemann ve Üst Riemann Toplamları

f fonksiyonu ve P bölümü için alt ve üst Riemann toplamları

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i) . \Delta x_i = f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \dots + f(l_n)\Delta x_n$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) . \Delta x_i = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta_2 + \dots + f(u_n)\Delta x_n$$



artan

Artan fonk. için

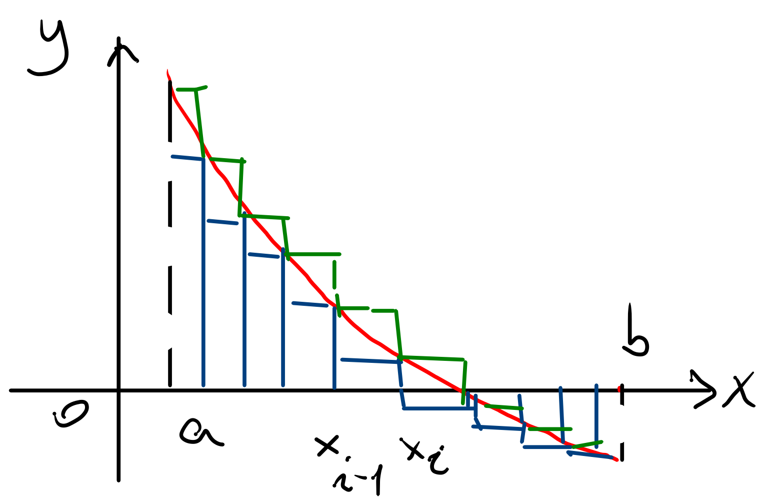
$$L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) . \Delta x_i$$

$$U(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) . \Delta x_i$$

Azalan fonk için

$$L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

$$U(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) . \Delta x_i$$



azalan

Herhangi iki reel sayı arasında başka bir reel sayı bulanabilecepinden $\forall$ P bölünmesi için $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) \leq I \leq \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$ olacak şekilde en azından bir I reel sayısı vardır. Eğer böyle tek bir sayı varsa buna f'in $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali deriz.

Tanım: (Belirli İntegral)

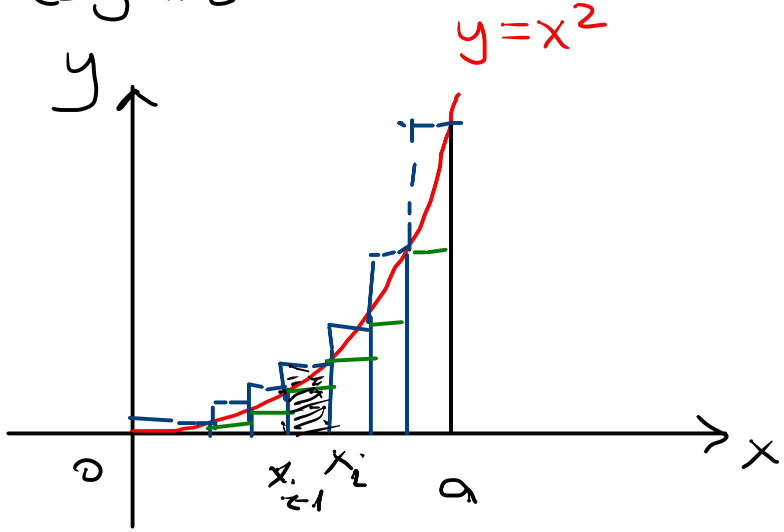
$[a,b]$ aralığının her P bölümü için $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) \leq I \leq \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$

olacak şekilde tam olarak sadece bir I sayısının bulunduğunu kabul edelim. O zaman f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu söyleriz ve I'ya f'in $[a,b]$ üzerindeki belirli integrali deriz.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

şeklinde de gösteririz.

Ör/ $a>0$ olmak üzere $y=x^2$ fonksiyonunun $[0,a]$ aralığı üzerinde integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve $\int_0^a x^2\,dx$ integralini hesaplayınız.



$$L(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i$$

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

$$\Delta x_i=\frac{a-0}{n}=\frac{a}{n}$$

$x_0=0$

$x_1=\frac{a}{n}$

$x_2=2\cdot\frac{a}{n}$

$\vdots$

$x_{i-1}=(i-1)\cdot\frac{a}{n}$

$x_i=i\cdot\frac{a}{n}$

$x_n=\cancel{n}\cdot\frac{a}{\cancel{n}}=a$

$$L(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1})^2\cdot\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)\cdot\frac{a}{n}\right]^2\cdot\frac{a}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a^3}{n^3}(i-1)^2$$

$$=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-2i+1\right)$$

$$\Rightarrow L(f,P_n) = \frac{a^3}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\,\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \frac{a^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{a^3 n(n+1)}{n^3} + \frac{a^3}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \cancelto{0}{\frac{a^3(n+1)}{n^2}} + \cancelto{0}{\frac{a^3}{n^2}}\right]$$

$$= \frac{2a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$$

$$U(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{a}{n}\right)^2\cdot\frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \frac{a^3}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \le I \le \lim_{n\to\infty} U(f,P_n)$$

$$\frac{a^3}{3} \le I \le \frac{a^3}{3} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{a^3}{3}$$

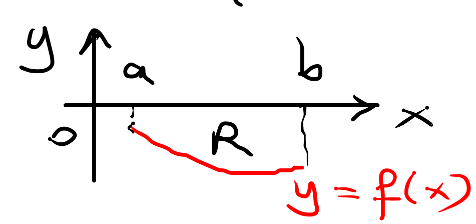
$$I = \int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

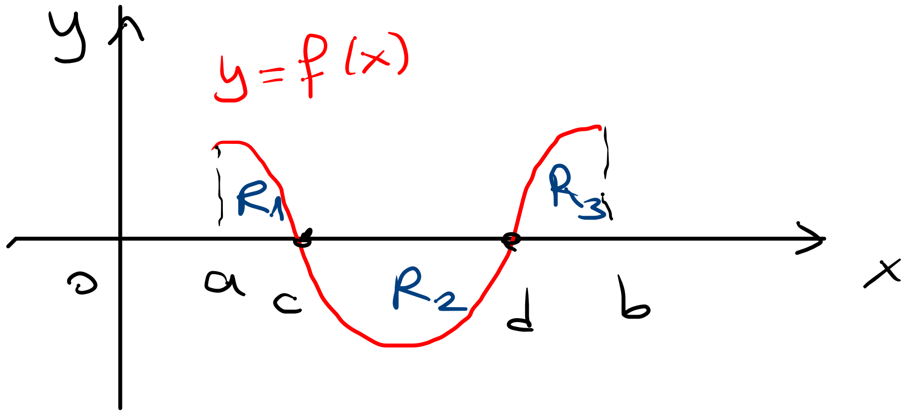
NOT: $[a,b]$'nin tüm P bölümleri için

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) \text{ 'dir.}$$

Eğer $[a,b]$ üzerinde $f(x) \ge 0$ ise o zaman $y=f(x)$'in grafiği, x-ekseni ve $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlı olan bölgenin alanı $A=\int_a^b f(x)\,dx$ br^2 dir.

Eğer $[a,b]$ üzerinde $f(x) \le 0$ ise o zaman $y=f(x)$'in grafiği x-ekseninin altında kalacağından aynı şekilde oluşan bölgenin alanı $A=-\int_a^b f(x)\,dx$ olacaktır.





$$A = A_1 - A_2 + A_3$$

veya

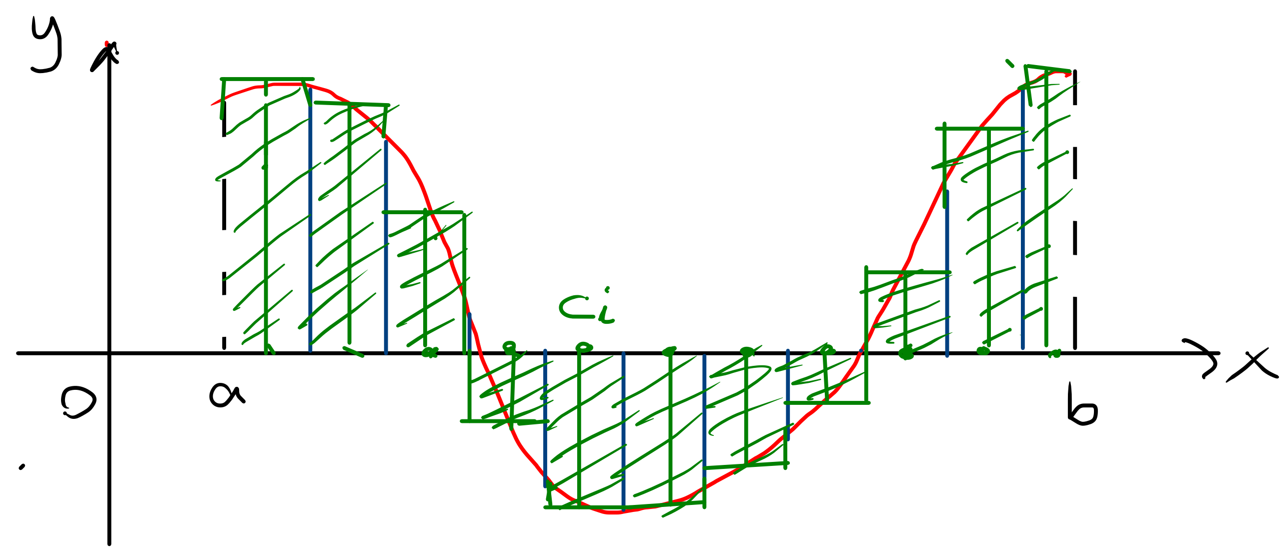
$$A = A_1 + |A_2| + A_3$$

$$A_1 = \int_a^c f(x)\,dx > 0$$

$$A_2 = \int_c^d f(x)\,dx < 0$$

$$A_3 = \int_d^b f(x)\,dx > 0$$

Genel Riemann Toplamı



$$R(f, P_n, c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\lim_{n \to \infty} R(f, P_n, c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

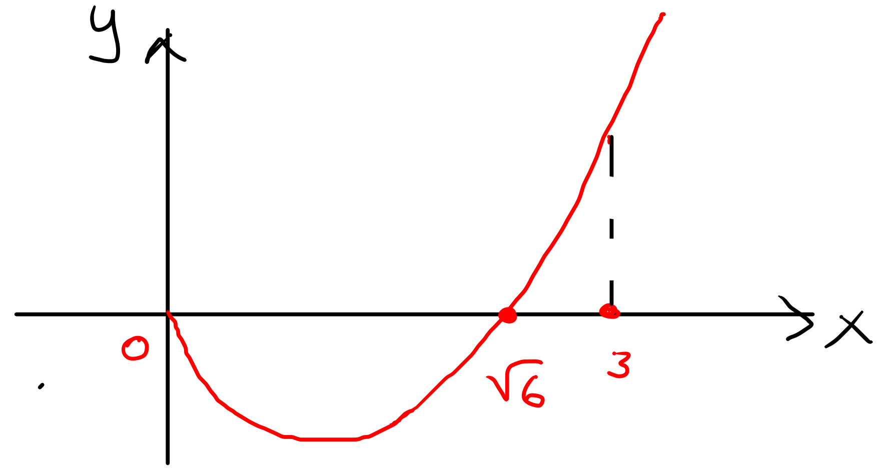
Teorem: Eğer f fonksiyonu sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli ise bu aralıkta integrallenebilirdir.

Örn/ $\int_0^3 (\underbrace{x^3-6x}_{f(x)})\,dx$ integralini Riemann toplamı ile hesaplayınız.

$x^3-6x=0$

$x(x^2-6)=0$

$x=0 \qquad x=\mp\sqrt{6}<3$



$\Delta x_i=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$

$x_i=i.\frac{3}{n}$

$$R(f,P_n,c)=\sum_{i=1}^{n} f(\underset{\downarrow x_i}{c_i}).\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(i.\frac{3}{n}\right)^3-6.i.\frac{3}{n}\right).\frac{3}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(i \cdot \frac{3}{n} \right)^3 - 6 \cdot i \cdot \frac{3}{n} \right) \cdot \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{81}{n^4} \cdot i^3 - \sum_{i=1}^{n} \frac{54 i}{n^2}$$

$$= \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{81}{4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{n^4} - 27 \, \frac{n(n+1)}{n^2}$$

(Bu bir alan hesabı değildir)

$$\lim_{n \to \infty} R(f, P_n, c) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{81}{4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{n^4} - 27 \cdot \frac{n(n+1)}{n^2} \right] = \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4}$$

Belirli İntegralin Özellikleri

Teorem: f ve g fonksiyonları a, b ve c noktalarını içeren bir aralıkta integrallenebilir olmak üzere

1°) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ 2°) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) M ve N birer sabit olmak üzere

$$\int_a^b (M f(x) \mp N g(x))\, dx = M \int_a^b f(x)\, dx \mp N \int_a^b g(x)\, dx$$

4) $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \quad (a \leq c \leq b)$$

5) $a \leq x \leq b$ için $f(x) \leq g(x)$ ise

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

6) Eğer $a \leq b$ ise

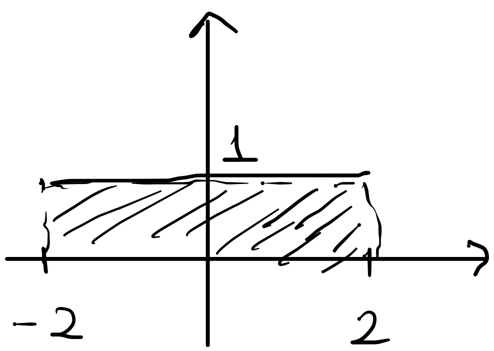
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

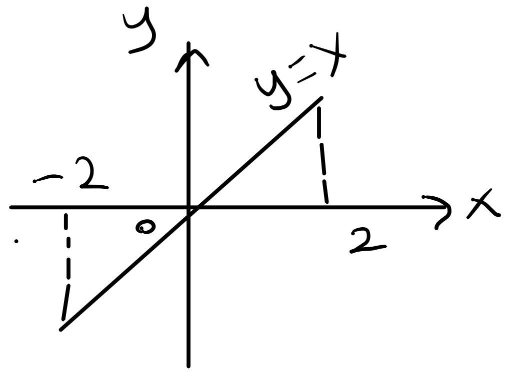
7) Eğer f tek fonksiyon ise; $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

8) Eğer f çift fonksiyon ise; $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$

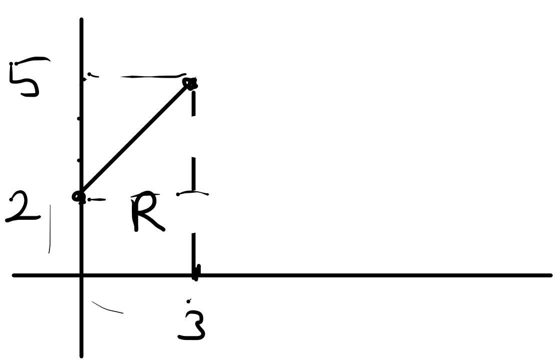
Örnekler

1) $$\int_{-2}^{2}(2+5x)\,dx = 2\underbrace{\int_{-2}^{2}dx} + 5\int_{-2}^{2}x\,dx = 2\cdot(4\cdot 1) + 5\cdot 0 = 8$$



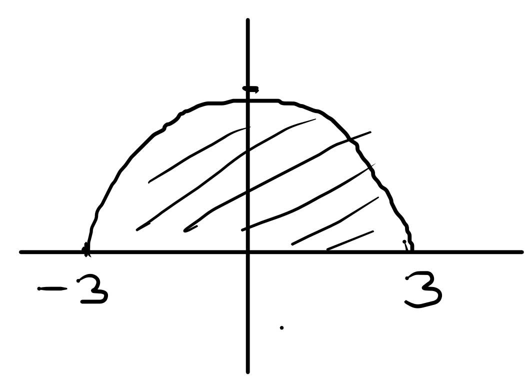


2) $$\int_{0}^{3}(2+x)\,dx = \frac{(2+5)\cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

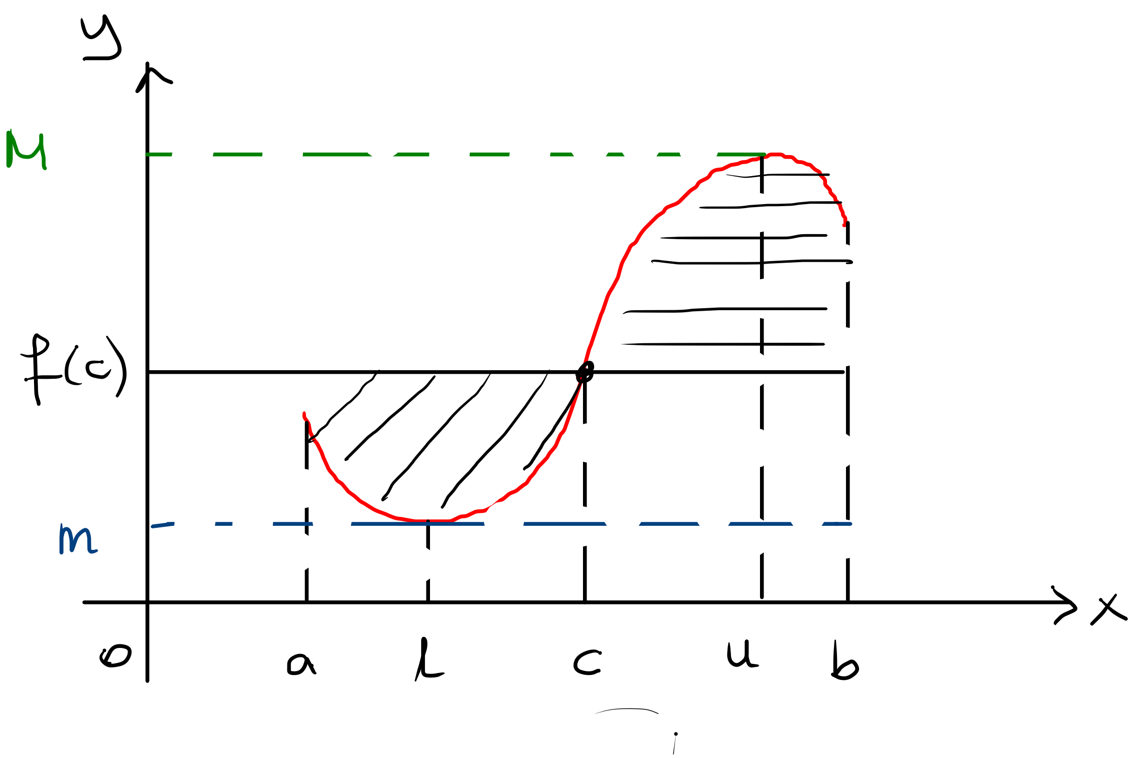


3) $$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{\pi\cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

$$y=\sqrt{9-x^2} \Rightarrow y^2+x^2=9$$



İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi



f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. O halde f'in bu aralıkta bir maksimum ve bir minimum değeri vardır.

$$m = f(l) \le f(x) \le f(u) = M$$
$$\forall x \in [a,b]$$

$[a,b]$ aralığını P'nin iki noktalı bölümü olarak düşünürsek;

$$x_0 = a \qquad x_1 = b$$

$$m\,(b-a) = L\,(f,P) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U\,(f,P) = M\,(b-a)$$

$$f(l) = m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{f(c)} \le M = f(u)$$

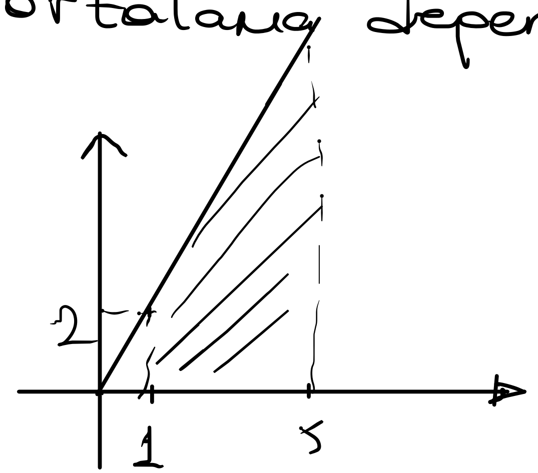
$c \in (a,b)$ Ara değer teo'den vardır.

Teorem: Eğer f, [a,b] aralığında sürekli ise o zaman

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ o.ş. $c \in (a,b)$ sayısı vardır.

$$\tilde{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

[a,b]'de f integrallenebilir ise f'in [a,b]'deki ortalama değeri



Ör/ $f(x) = 2x$ fonksiyonunun [1,5] aralığındaki ortalama değerini bulunuz.

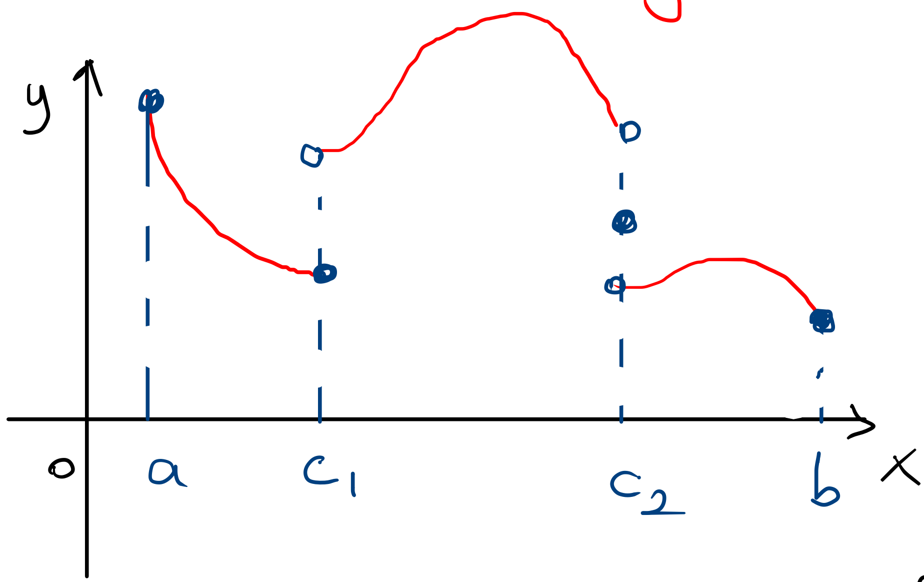
$a = 1$ $\qquad f(x) = 2x$

$b = 5$

$$\tilde{f} = \frac{1}{5-1}\int_1^5 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{10+2}{2}\cdot 4\right) = 6$$

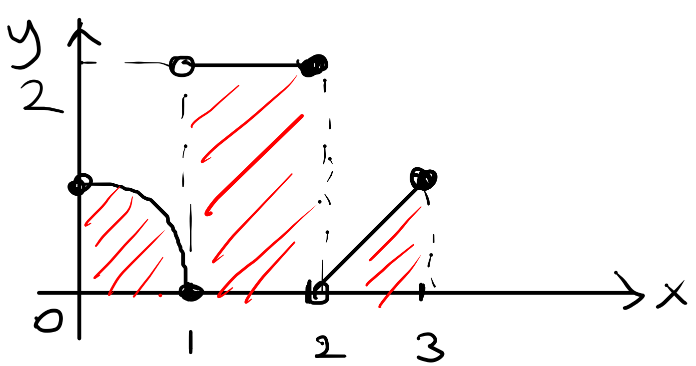
Parçalı Sürekli Fonksiyonların Belirli İntegrali



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f_1(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f_3(x)\,dx$$

Ör

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \le 2 \\ x-2 & 2 < x \le 3 \end{cases} \Rightarrow \int_0^3 f(x)\,dx = ?$$



$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^2 2\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + 1.2 + \frac{1.1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{2}$$

Integral Hesabın Temel Teoremi

Teorem: f, fonksiyonun, a noktasını içeren bir I aralığında sürekli olduğunu kabul edelim.

I. KISIM

F, fonksiyonu I üzerinde $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ile tanımlanmış olsun.

O zaman F fonksiyonu I üzerinde türevlenebilir ve $F'(x) = f(x)$ 'dir.

O halde F, I üzerinde f'in anti-türevidir.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

NOT:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right] = [b(x)]' \cdot f[b(x)] - [a(x)]' \cdot f[a(x)]$$

II. KISIM

Eğer $G(x)$, I üzerinde $f(x)$'in anti-türevi ise o zaman I'daki herhangi bir b için

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \text{ 'dır.}$$
$$= G(x)\Big|_a^b$$

Ör/

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Ör/

$$\int_{-1}^2 (x^2-3x+2)\,dx = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^2 = \left[\frac{8}{3} - 6 + 4\right] - \left[\frac{-1}{3} - \frac{3}{2} - 2\right]$$

$$= 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Ör/

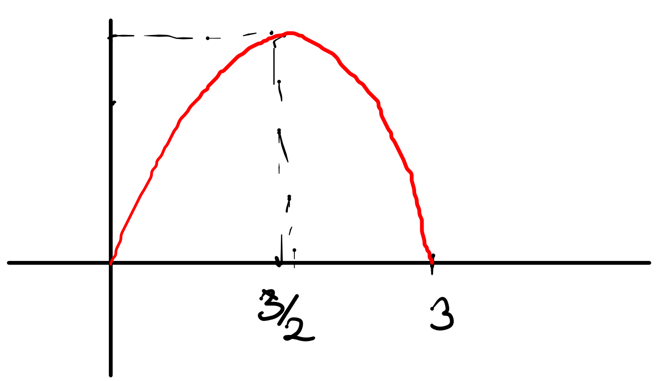
x-ekseni üzerinde ve $y = 3x - x^2$ eğrisi altında kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

$3x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = 3$

$y' = -2x + 3 \qquad y' = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$y = \frac{9}{2} - \frac{9}{4}$

$= \frac{9}{4}$



$$\int_0^3 (3x - x^2)\,dx = 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$= \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) - (0) = \frac{27}{6}\ \text{br}^2$$

Ör/ $x=0$'dan $x=\pi$'ye $y=\sin x$ eğrisi altında, $y=0$ doğrusu üzerinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

$\sin x > 0 \quad [0,\pi]$

$$A=\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0$$
$$= 1+1 = 2 \text{ br}^2$$

Ör/ $y=1$ doğrusu üzerinde $y=\dfrac{5}{x^2+1}$ eğrisi altında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$f(x)=\frac{5}{x^2+1}$$
$$f(-x)=\frac{5}{(-x)^2+1}=\frac{5}{x^2+1}=f(x)$$

$$1=\frac{5}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$$

$$A_1=\int_{-2}^{2}\frac{5}{x^2+1}\,dx = 2\int_0^2 \frac{5\,dx}{x^2+1} = 10\int_0^2\frac{dx}{x^2+1} = 10\arctan x\Big|_0^2 = 10\arctan 2 - 0$$

$$A_2=\int_{-2}^{2} dx = 2\int_0^2 dx = 2x\Big|_0^2 = 2.(2-0)=4$$

$$A=A_1-A_2=10\arctan 2 - 4 \text{ br}^2$$

Ör/ $f(x)=e^{-x}+\cos x$ $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz.

$$\tilde{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\tilde{f}=\frac{1}{0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\int_{-\pi/2}^{0}\left(e^{-x}+\cos x\right)dx=\frac{2}{\pi}\left[-e^{-x}+\sin x\Big|_{-\pi/2}^{0}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(-e^{0}+\sin 0\right)-\left(-e^{\pi/2}+\sin\left(-\pi/2\right)\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\cancel{-1}+0+e^{\pi/2}-\underbrace{\cancel{\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)}}_{1}\right]$$

$$=\frac{2e^{\pi/2}}{\pi}$$

Ör/ $$\frac{d}{dx}\left[\int_x^3 e^{-t^2}dt\right]=-1\cdot e^{-x^2}=-e^{-x^2}$$

Ör/ $\frac{d}{dx}\left[x^2\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt\right] = 2x\cdot\left[\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt\right] + x^2\cdot 5\cdot e^{-25x^2}$

$$\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right]' = [b(x)]'\cdot f(b(x)) - [a(x)]'\cdot f(a(x))$$

Ör/ $\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,dt\right] = 3x^2\cdot e^{-x^6} - 2x\cdot e^{-x^4}$

NOT: Eğer $\int_a^b f(x)\,dx$ integralinde $f(x)$ $[a,b]$ aralığının her noktasında sürekli değilse temel teorem uygulanamaz.

Ör/ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0-0=0$ (YANLIŞ)

Çünkü $\frac{1}{x}$ $x=0\in[-1,1]$'de süreksiz. Dolayısıyla temel teoremi uygulayamayız.

Ör/ $f(x) = 2 + 3\int_4^x f(t)\,dt$ integral denklemini çözünüz.

$$f'(x) = 3 \cdot f(x) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int 3\,dx$$

$$\ln|f(x)| = 3x + \ln c$$

$$f(x) = c \cdot e^{3x}$$

$f(4) = 2 + 3 \cdot 0$

$f(4) = 2$

$$f(4) = c \cdot e^{12} \Rightarrow c \cdot e^{12} = 2$$

$$c = 2 \cdot e^{-12}$$

$$\boxed{f(x) = 2 \cdot e^{3x-12}}$$

Ör/ Temel teoremi kullanarak aşağıdaki Riemann toplamının limitini bulunuz.

$$R(f,P_n,c)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x_i$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)}_{\cos(x_j)}\right]=?$$

$a=0,\quad b=\frac{\pi}{2}$

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot \Delta x_j$$

$$\Delta x_j=\frac{b-a}{n}$$

$$x_j=j\cdot\frac{(b-a)}{n}$$

$f(x)=\cos x$

$$x_j=\frac{j\pi}{2n}$$

$$\frac{\cancel{j}\pi}{2n}=\frac{\cancel{j}(b-a)}{n}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{n}=\frac{(b-a)}{n}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}-0}{n}=\frac{b-a}{n}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\pi}{2n}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\right]\cdot\frac{\pi/2}{\pi/2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\pi}{2n}\right]\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$=\left[\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right]\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$=\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\frac{2}{\pi}=(1-0)\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$