Lineer ve kuadratik yüzeyler

Düzlem

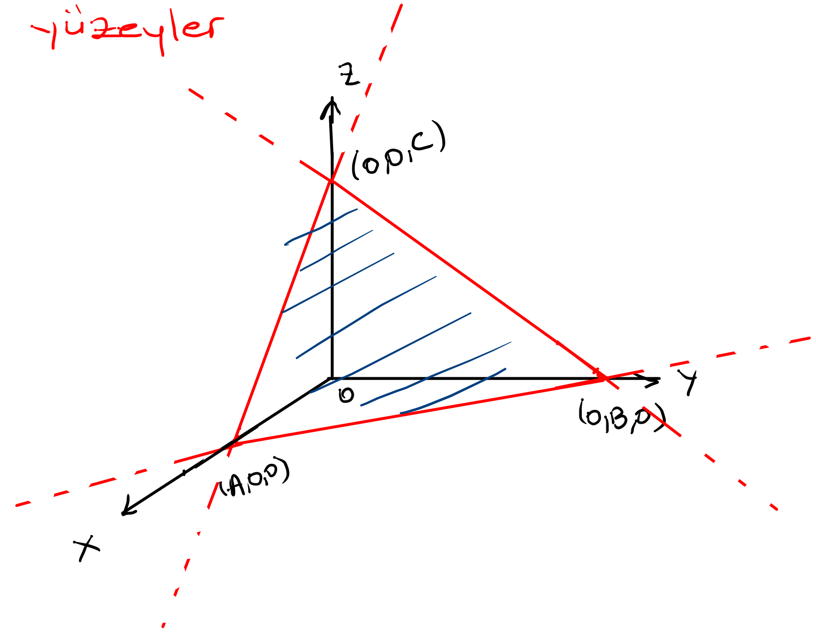
1°) $ax+by+cz+d=0$

$ax+by+cz=-d$

$$\frac{a}{-d}x+\frac{b}{-d}y+\frac{c}{-d}z=1$$

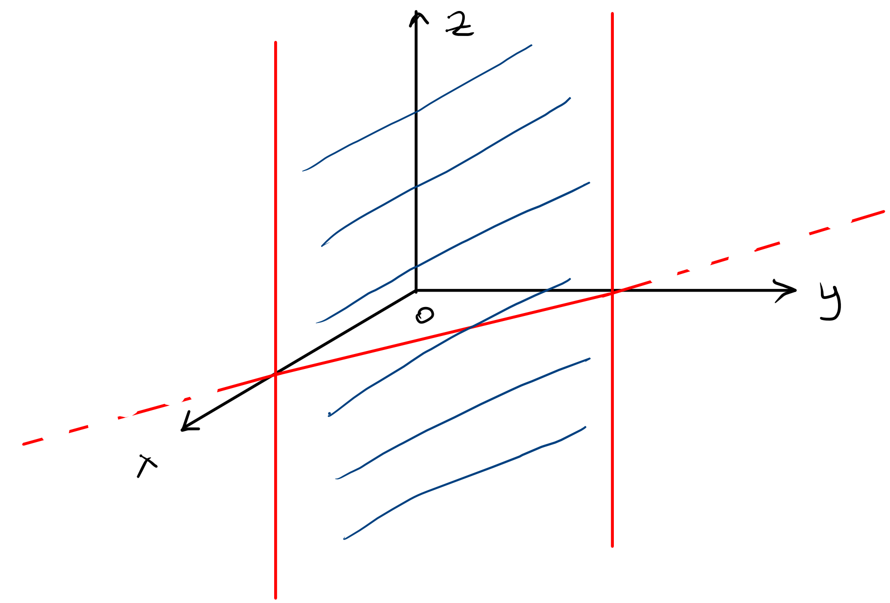
$$-\frac{a}{d}=\frac{1}{A},\quad \frac{b}{-d}=\frac{1}{B},\quad \frac{c}{-d}=\frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1}_{\text{Düzlemin kesen formu}}$$



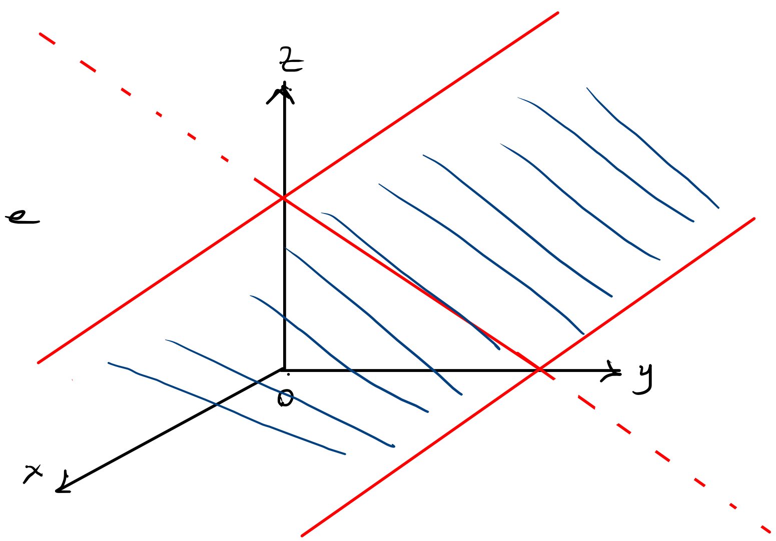
2°) $ax+by+d=0$

$z=0$ olduğu için z-eksenine paralel hareket eder.

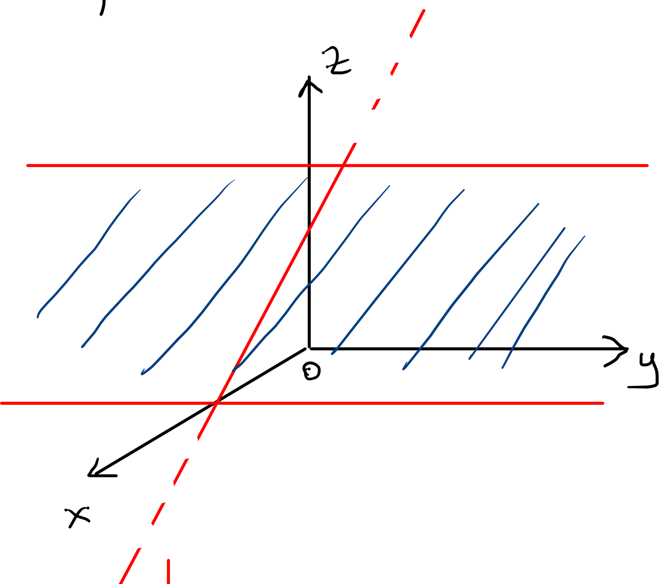


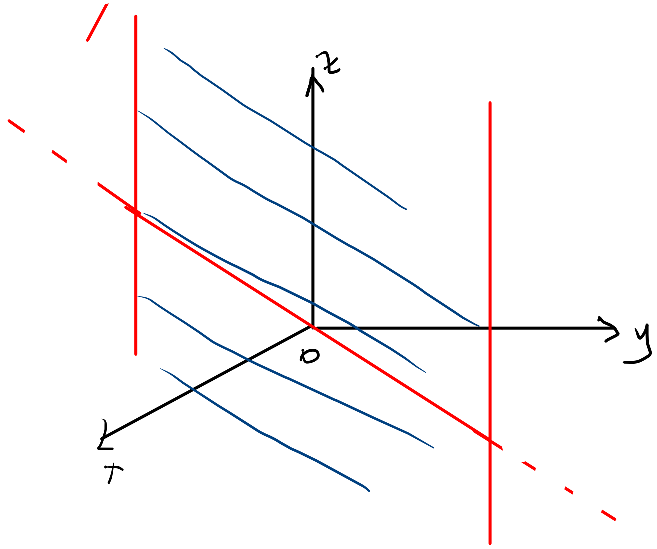
3°) $by+cz+d=0$

$x=0$ olduğu için x-eksenine paralel hareket eder.

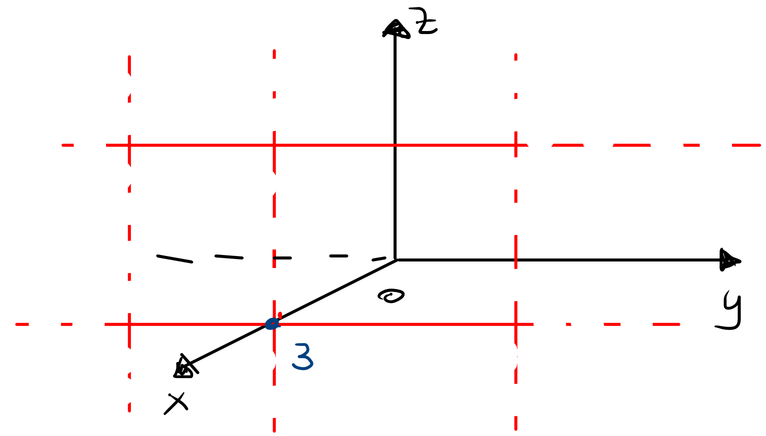


4°) $ax + cz + d = 0$
$y = 0$ olduğundan y-eksenine paralel hareket eder.





5°) $d \neq 0$, $b = c = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow ax + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{a}$ düzlemi yoz-düzlemine paralel, x eksenine dik bir düzlemdir.



6°) $d \neq 0$, $a = c = 0$, $b \neq 0 \Rightarrow by + d = 0 \Rightarrow y = \frac{-d}{b}$ düzlemi xoz-düzlemine paralel, y-eksenine dik bir düzlemdir.

7°) $d \neq 0$, $a = b = 0$, $c \neq 0 \Rightarrow cz + d = 0 \Rightarrow z = \frac{-d}{c}$ düzlemi xoy-düzlemine paralel, z-eksenine dik bir düzlemdir.

8°) $d = 0$, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ ise düzlem orjinden geçer.

Küre

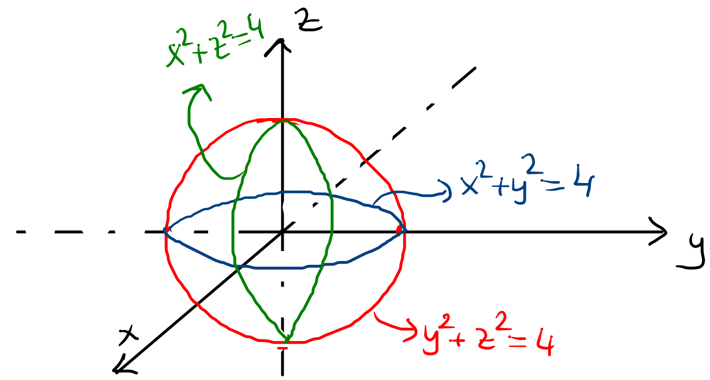
Genel denklemi $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

Ö/ $x^2+y^2+z^2=4$

$x=0 \Rightarrow \quad y^2+z^2=4$

$y=0 \Rightarrow \quad x^2+z^2=4$

$z=0 \Rightarrow \quad x^2+y^2=4$



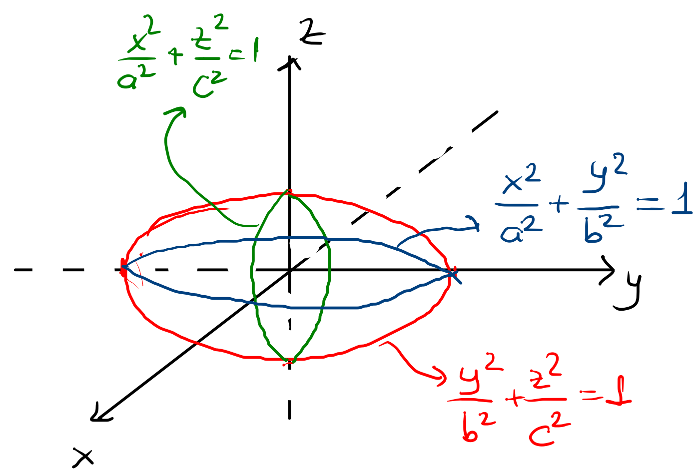
Elipsoid

Genel denklemi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

$x=0 \Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

$y=0 \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

$z=0 \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



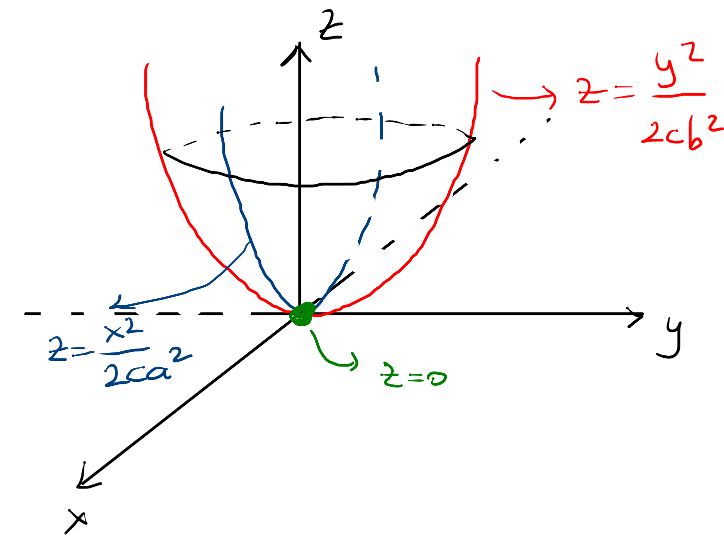
Paraboloid

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2cz$

$x=0 \Rightarrow \quad z=\dfrac{y^2}{2cb^2}$

$y=0 \Rightarrow \quad z=\dfrac{x^2}{2ca^2}$

$z=0 \Rightarrow \quad$ orjin.



Koni

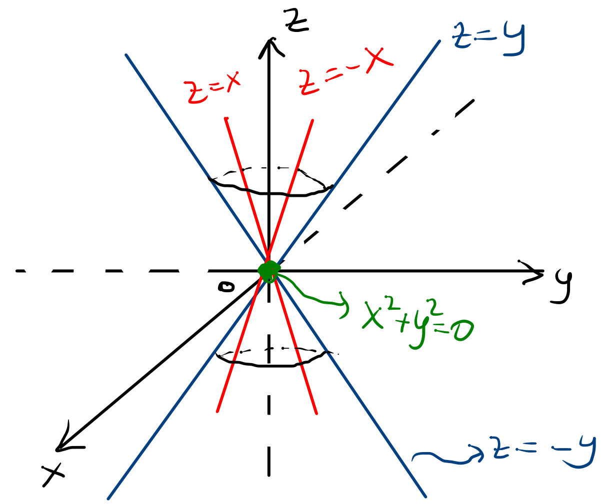
$a^2x^2+b^2y^2=c^2z^2$,

Ör/ $x^2+y^2=z^2$

$x=0 \Rightarrow y^2=z^2 \Rightarrow z=\mp y$

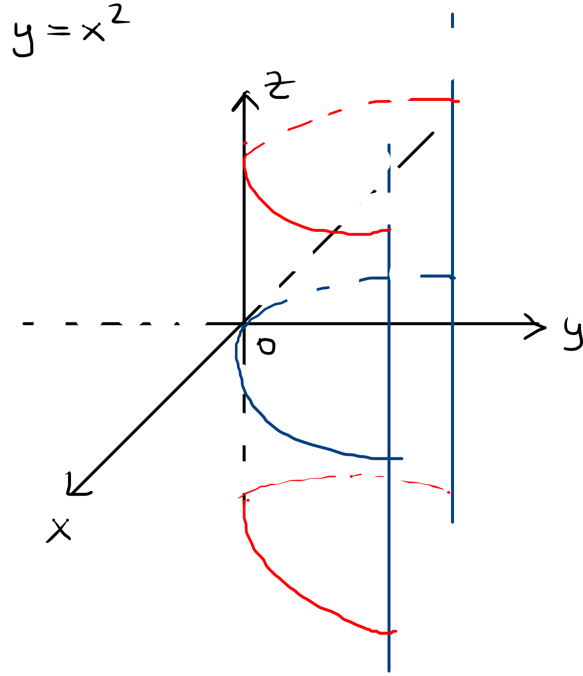
$y=0 \Rightarrow x^2=z^2 \Rightarrow z=\mp x$

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=0 \rightarrow$ orjin



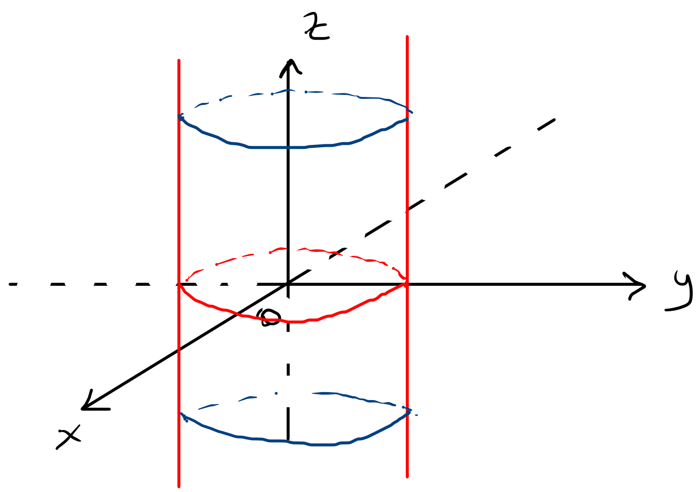
Parabolik Silindir

Ör/ $y=x^2$



Silindir

Ör/ $x^2+y^2=4$



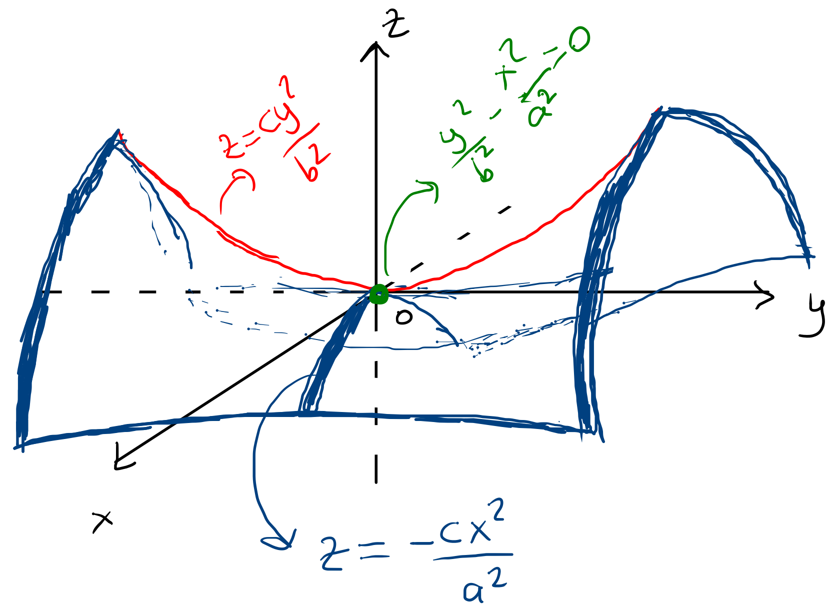
Hiperbolik Paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \qquad (c>0)$$

$$x=0 \Rightarrow z = \frac{cy^2}{b^2}$$

$$y=0 \Rightarrow z = \frac{-cx^2}{a^2}$$

$$z=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \text{ orjin}$$



Limit ve Süreklilik

Tanım: Eğer (a,b) noktasına yeterince yakın tüm (x,y) noktaları için $f(x,y)$'nin değerleri belli bir reel L sayısına keyfi derecede yakın ise (x,y), (a,b)'ye yaklaşırken $f(x,y)$, L limitine yaklaşır denir.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Tanım ($\varepsilon - \delta$)

Eğer

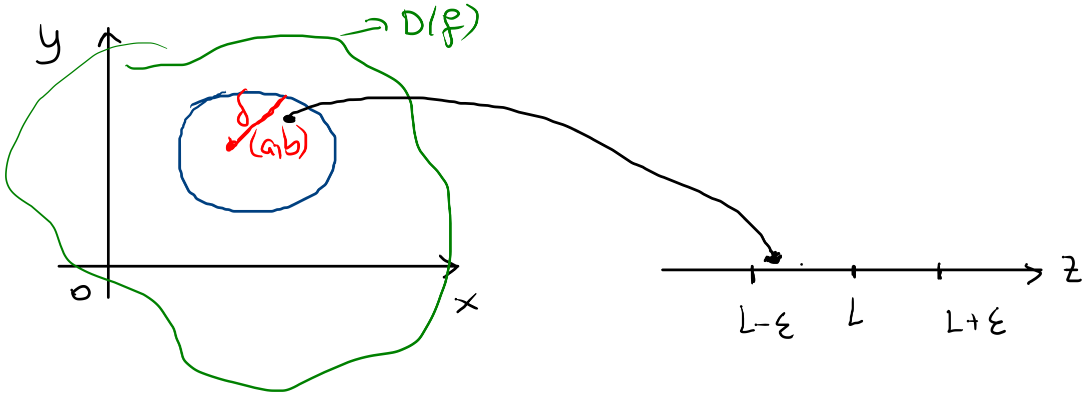
i) (a,b) noktasının her komşuluğu f fonksiyonunun tanım kümesinden ((a,b) noktasından farklı) noktalar içeriyorsa

ve

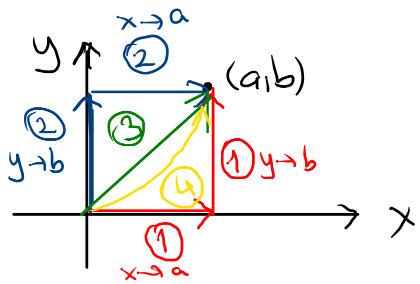
ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ iken $|f(x,y)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa o zaman (x,y), (a,b)'ye yaklaşırken $f(x,y)$, L limitine yaklaşır ve

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad / \quad \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y) = L$$

şeklinde gösterilir.



NOT: Limit varsa tektir.



İki değişkenli bir fonksiyon için (x,y) noktasının, fonksiyonun tanım kümesinde (a,b) noktasına yaklaşımı nasıl olursa olsun eğer $f(x,y)$ aynı L sayısına yaklaşıyorsa o zaman fonksiyon limite sahiptir denir. Yani limit yola bağlı olmamalıdır.

Çift yol testi

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right] \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right]\end{array}\right] \neq \Rightarrow \text{limit yoktur.}$$

(Ancak eşit çıkmaları limitin var olduğunu göstermez)

Teorem (a,b)'nin her komşuluğu $D(f)\cap D(g)$'den noktalar içermek üzere $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ olsun. $k\in\mathbb{R}$ olsun.

1°) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) \mp g(x,y)\right] = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \mp \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L \mp M$

2°) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (k f(x,y)) = k.\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k.L$

3°) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y).g(x,y)\right] = \left[\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right]\left[\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\right] = L.M$

$4^\circ)\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$ olmak koşuluyla)

$5^\circ)\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)\right]^n = \left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right]^n = L^n$

$6^\circ)\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ve n çift ise $L > 0$ olmak koşuluyla)

ÖRNEKLER

$1^\circ)\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{0-0+3}{0+0-1} = -3$

$2^\circ)\ \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

$3^\circ)\ \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{x-y}}$

$= 0$

4) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x\neq y)}} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x\neq y)}} \dfrac{(x-y)^2}{x-y} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x\neq y)}} x-y = 0$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2x^2-3xy+y^2}{2x^2+xy-y^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\cancel{(2x-y)}(x-y)}{\cancel{(2x-y)}(x+y)} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1-2}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$

6) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun $(x,y)\to(0,0)$ iken limitinin varlığını araştırınız.

1. yol $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{0}{x^4}\right] = 0$

2. yol $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left[\dfrac{0}{y^2}\right] = 0$

3. yol $y=x$ $(0,0)$ noktasından geçen bir doğru.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=x}} \dfrac{2x^3}{x^4+x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(x^2+1)}$

$= \dfrac{0}{0+1} = 0$

4. yol $y=x^2$ $(0,0)$ noktasından geçen bir eğri

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=x^2}} \dfrac{2x^4}{x^4+x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^4}{2x^4} = 1 \neq 0$

Limit yoktur. (Farklı yollardan alınan limitler farklı çıktığından limit yoktur)

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}$ fonksiyonunun limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2} = \lim_{x\to1}\left[\lim_{y\to1}\frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}\right] = \lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1} \underset{\text{L'H}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to1}\frac{\pi\cdot\cos(\pi x)}{1} = -\pi$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2} = \lim_{y\to1}\left[\lim_{x\to1}\frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}\right] = \lim_{y\to1}\frac{\overbrace{y\sin\pi}^{=0}}{y-1} = 0$$

$-\pi \neq 0$ limit yoktur.

8) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun orjinde limite sahip olduğunu gösteriniz

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to0}\left[\frac{0}{x^2}\right] = 0$$

$\varepsilon>0$ verildiğinde $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var mıdır?

$x^2 < x^2+y^2$

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = |y| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$\delta=\varepsilon>0$ olarak alındığında fonksiyonun orjinde limite sahip olduğu elde edilir.

Süreklilik

Tanım:

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise fonksiyon (a,b) noktasında süreklidir denir.

- $f(x,y)$, (a,b) noktasında tanımlı olmalı
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ mevcut olmalı
- fonksiyonun (a,b) noktasındaki limit değeri bu noktadaki değerine eşit olmalı.

Tanım:

Her $\varepsilon>0$ sayısı için $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ iken $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x,y)$, (a,b) noktasında süreklidir denir.

ÖRNEKLER

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

$f(0,0)=0$ ✓

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=x}} \dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0$

limit orjinde mevcut olmadığından fonksiyon orjin noktasında süreksizdir.

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & x>0,\ y>0 \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun orjinde sürekli olduğunu gösteriniz.

• $f(0,0)=0$

• $x \neq y$ için; $\dfrac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{(xy-y^2)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \dfrac{y\,\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\cancel{x-y}}$

$= y(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0 = f(0,0)$

$x=y$ için $f(x,x) = \dfrac{x^2-x^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \dfrac{0}{2\sqrt{x}} = 0 = f(0,0)$

Fonksiyon orjinde süreklidir.

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonksiyonunun orjinde sürekli olduğunu gösteriniz.

- $f(0,0) = 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} \right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x^3}{x^2} \right] = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ iken $\left| \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} - \underbrace{0}_{f(0,0)} \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var mıdır?

$$\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| = |x| \cdot \left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \cdot \left| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \right| = |x| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$|x^2 - y^2| \leq x^2+y^2$

$\delta = \varepsilon$ alındığında fonksiyonun $(0,0)$'da sürekli olduğu gösterilmiş olur.

Bileşkelerin sürekliliği

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0,y_0) noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $f(x_0,y_0)$'da sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyon ise bu durumda $g[f(x,y)]$ fonksiyonu (x_0,y_0)'da süreklidir.

Ör/ e^{x-y} , $\ln(1+x^2+y^2)$