Modifiye Green Fonksiyonları

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=0 \qquad \alpha<x<\beta \\ &B_1y=-l_1y'(\alpha)+h_1y(\alpha)=0 \\ &B_2y=l_2y'(\beta)+h_2y(\beta)=0 \end{aligned}\right\} (49) \qquad L:\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+q(x)$$

homojen sınır değer problemi aşikar olmayan çözümlere sahip olduğunda L operatörü ve verilen sınır şartlarına göre bu problem için Green fonksiyonunu bulamayız.

Başka bir deyişle

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y=0 \qquad \alpha<x<\beta \\ &B_1y=0 \\ &B_2y=0 \end{aligned}\right\} (50)$$

probleminin bir özdeğeri $\lambda=0$ olduğunda bu problemin Green fonksiyonu yoktur.

kenarları ve uçları yalıtılmış bir çubuğun durgun haldeki ısı iletimini ifade eden

$$\left.\begin{aligned} &-k\frac{d^2u}{dx^2}=F(x) \\ &u'(0)=0 \qquad u'(L)=0 \end{aligned}\right\} (51)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. (51) probleminin homojen kısmı $u = sbt$ çözümüne sahiptir. Eğer $x=0$ 'dan $x=L$'ye (51) problemindeki denklemi integre edersek;

$$\int_0^L -k\frac{d^2u}{dx^2}\,.\,dx = \int_0^L F(x)\,dx$$

$$\left\{-k\frac{du}{dx}\Big|_0^L\right\} = \int_0^L F(x)\,dx$$

$$-k\left[u'(L)-u'(0)\right] = \int_0^L F(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^L F(x)\,dx = 0 \qquad (52)$$

koşulu sağlanmalıdır.

$\delta(x-T)$ fonksiyonu (52) koşulunu sağlamadığından dolayı (51) probleminde $F(x)=\delta(x-T)$ aldığımızda bu probleme ait Green fonksiyonu için

$$\left.\begin{aligned} -k\frac{d^2g}{dx^2} &= \delta(x-T) \\ g'(0;T)=0 \quad & g'(L;T)=0 \end{aligned}\right\} \text{ probleminin çözümü yoktur.}$$

Teorem: $$\left.\begin{aligned} Ly=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=F(x) \qquad \alpha<x<\beta \\ B_1y=0 \\ B_2y=0 \end{aligned}\right\} \quad (52')$$

probleminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul

$$\left.\begin{aligned} Ly=0 \\ B_1y=0 \\ B_2y=0 \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

homojen sınır değer problemi $w(x)$ aşikâr olmayan çözümüne sahip olduğunda her $w(x)$ için

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,w(x)\,dx=0 \qquad (54)$$

olmasıdır.

İspat: (54) koşulunun gerekliliği kolayca gösterilebilir. Eğer $y(x)$ (49) probleminin bir çözümü ise $w(x)$ (53) denklemini sağladığından ($Lw=0$ olduğundan)

$$\int_\alpha^\beta F(x).w(x)dx = \int_\alpha^\beta (Ly)\,w(x)\,dx = \int_\alpha^\beta y\big[\underbrace{L\,w(x)}_{=0}\big]dx + \Big\{p_0(x).\left[y.w'-y'w\right]\Big\}_\alpha^\beta$$

$$\begin{aligned} &= p_0(\beta)\left[y(\beta)w'(\beta)-y'(\beta)w(\beta)\right] \\ &- p_0(\alpha)\left[y(\alpha)w'(\alpha)-y'(\alpha)w(\alpha)\right] \end{aligned} \qquad (55)$$

(53) ile verilen sınır şartları karışık olmayan sınır şartları ya da periyodik sınır şartları olduğunda (55) eşitliğinin sağ kısmı sıfıra eşit olur ve

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x).\, w(x)\, dx = 0$$

elde edilir.

Yeterliliğe gelince; (53) problemi aşikar olmayan çözümlere sahip olduğunda ve (54) koşulu sağlandığında (49) probleminin çözümü tek değildir. Eğer $y(x)$ bir çözüm ise c keyfi bir değer ve $w(x)$ (53) probleminin bir çözümü olmak üzere $y(x)+cw(x)$ de bir çözümdür. Bu nedenle yeterlilik için Modifiye Green fonksiyonları ele alınır. Çünkü $\delta(x-T)$ (54) koşulunu sağlamadığından $g(x;T)$ fonksiyonu

$$Lg = \delta(x-T)$$

$$B_1 g = 0$$

$$B_2 g = 0$$

problemini sağlamaz.

(53) probleminin bir veya iki lineer bağımsız çözüme sahip olup olmamasına bağlı olarak iki durum ortaya çıkar:

4) (53) probleminin çarpımsal sabit için sadece tek aşikâr olmayan çözüme sahip olması durumu.

$$\int_{\alpha}^{\beta} [w(x)]^2 dx = 1 \qquad (56)$$

normalize edilmiş olarak alınır.

(49) problemi için modifiye Green fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned} L\bar{g} &= \delta(x-T) - w(x)w(T) \\ B_1\bar{g} &= 0 \\ B_2\bar{g} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

probleminin bir çözümü olarak tanımlanır. (57) ile verilen diferansiyel denklemin sağ tarafı (54) koşulunu sağlar ve $\bar{g}(x;T)$ çözümü ile Teorem'i sağlarız. Ancak çözümün tek olmamasından dolayı $\bar{g}(x;T)$ nin yapısında kullanılan metoda bağlı olarak modifiye Green fonksiyonu simetrik olabilir ya da olmayabilir.

Modifiye Green fonksiyonları, adi Green fonksiyonunun sağladığı süreklilik özelliklerine benzer özellikleri sağlar. Bu özellikleri $\bar{g}(x;T)$ nin bulunmasında kullanabiliriz.

Modifiye Green fonksiyonları (54) koşulunu sağlayan bir $F(x)$ çözümüne sahip olduğundan (49) probleminin çözümünü bulmak için; $v=y(x)$, $u=\bar{g}(x;T)$ almak suretiyle Green özdeşliğini $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}[vLu-uLv]=\left\{p_0[u'v-v'u]\right\}_{\alpha}^{\beta}$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{yL\bar{g}-\bar{g}Ly\right\}dx=\left\{p(x)\left[y.\frac{\partial\bar{g}}{\partial x}-\bar{g}(x;T).y'(x)\right]\right\}_{\alpha}^{\beta}$$

şeklinde yazarız. Bu eşitliğin ; $\bar{g}(x;T)$'nin sınır şartlarını sağlaması durumunda sıfıra eşitlendiği kolayca gösterilir. Bu durumda (49) ve (57) ile verilen diferansiyel denklemler ile

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{y.\left[\delta(x-T)-w(x)w(T)\right]-\bar{g}(x;T)F(x)\right\}dx=0$$

$$y(T)-c_1w(T)-\int_{\alpha}^{\beta}\bar{g}(x;T)F(x)dx=0$$

$$c_1=\int_{\alpha}^{\beta}y(x)w(x)dx$$

$$y(T)=\int_{\alpha}^{\beta}\bar{g}(x;T)F(x)dx+c_1w(T) \qquad (58)$$

veya

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\bar{g}(T;x)F(T)dT+c_1w(x) \qquad (59)$$

elde edilir. $y(x)$ sadece $c_1w(x)$ eklenmesiyle tek çözüm olacağından (59) daki c'nin indisini gözardı edebiliriz.

$$\int_\alpha^\beta [w(x)]^2 dx = 1$$

$$w(x) = \sin 2x$$

Ör/

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = F(x) \qquad 0<x<\pi \\ &y(0)=y(\pi)=0 \end{aligned}\right\}$$ sınır değer problemini çözelim.

$$\int_\alpha^\beta \sin^2 2x\, dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 4x}{2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 4x\, dx$$
$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$r^2+4=0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp 2i \quad \Rightarrow y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$\sin 2x$ fonksiyonu verilen iki sınır şartını da sağlar. Dolayısıyla bu problem için Green fonksiyonu yoktur. Bu nedenle $\bar{g}(x;T)$ modifiye Green fonksiyonunu bulalım.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\bar{g}(x;T)}{dx^2} + 4\bar{g}(x;T) = \delta(x-T) - \frac{2}{\pi}\sin 2x\,\sin 2T \\ &\bar{g}(0;T)=0 \\ &\bar{g}(\pi;T)=0 \end{aligned}\right\}$$ probleminin çözümü olacak şekilde Modifiye Green fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \bar{g}(x;T) \quad \forall x=T \text{ için sürekli} \\ &\bullet\ x\neq T \text{ için} \quad \bar{g}_+'(x;T) - \bar{g}_-'(x;T) = 1 \\ &\bullet\ \bar{g}(x;T) \text{ denklemi sağlamalı.} \end{aligned}\right\}$$

$$\bar{g}'' + 4\bar{g} = -\frac{2}{\pi}\sin 2x \sin 2T$$

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp 2i \qquad \bar{g}_h = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$\bar{g}_{\ddot{o}} = x.(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$$

$$\bar{g}_{\ddot{o}}' = (c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) + x.(2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x)$$

$$\bar{g}_{\ddot{o}}'' = 4(c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x) + x.(-4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x)$$

$$\bar{g}_{\ddot{o}}'' + 4\bar{g}_{\ddot{o}} = 4(c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x) \equiv -\frac{2}{\pi}\sin 2x \sin 2T$$

$$c_1 = 0 \qquad -4c_2 = -\frac{2}{\pi}\sin 2T$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi}\sin 2T \Rightarrow \bar{g}_{\ddot{o}} = \frac{x}{2\pi}\cos 2x . \sin 2T$$

$$\bar{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi}\sin 2T . \cos 2x + \begin{cases} A\cos 2x + B\sin 2x & 0 \le x < T \\ C\cos 2x + D\sin 2x & T < x \le \pi \end{cases}$$

$$\bar{g}(0;T) = 0 \qquad \bar{g}(\pi;T) = 0$$

$$\bar{g}(0;T) = A\cos 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A=0}$$

$$\bar{g}(\pi;T) = \frac{1}{2}\sin 2T + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}\sin 2T}$$

$$\bar{g}(T;T) = \frac{T}{2\pi}\sin 2T\cos 2T + \begin{cases} A\cos 2T + B\sin 2T & 0 \le x \le T \\ C\cos 2T + D\sin 2T & T \le x \le \pi \end{cases}$$

$$x \to T^{\pm}$$

$$A\cos 2T + B\sin 2T = C\cos 2T + D\sin 2T$$

$$\bar{g}'(x;T) = \frac{1}{2\pi}\sin 2T\cos 2x - \frac{x}{\pi}\sin 2T\sin 2x + \begin{cases} -2A\sin 2x + 2B\cos 2x & 0 \le x < T \\ -2C\sin 2x + 2D\cos 2x & T < x \le \pi \end{cases}$$

$$\bar{g}'_+ - \bar{g}'_- = 1 \Rightarrow \quad (2D\cos 2T - 2C\sin 2T) - (2B\cos 2T - 2A\sin 2T) = 1$$

$$(2D - 2B)\cos 2T + (2A - 2C)\sin 2T = 1 \quad /\cos 2T$$

$$(A - C)\cos 2T + (B - D)\sin 2T = 0 \quad /-2\sin 2T$$

$$(2D - 2B)\cos^2 2T + (2D - 2B)\sin^2 2T = \cos 2T$$

$$2D - 2B = \cos 2T$$

$$B = B(T) \Rightarrow D = B(T) + \frac{1}{2}\cos 2T$$

$$\Rightarrow \quad \bar{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi}\sin 2T\cos 2x + \begin{cases} B\sin 2x & 0 \le x \le T \\ -\frac{1}{2}\sin 2T\cos 2x + \left(B + \frac{1}{2}\cos 2T\right)\cdot \sin 2x & T \le x \le \pi \end{cases}$$

$$= \frac{x}{2\pi}\sin 2T\cos 2x + \begin{cases} B\sin 2x & 0 \le x \le T \\ \frac{1}{2}\sin 2(x-T) + B\sin 2x & T \le x \le \pi \end{cases}$$

$$= \frac{x}{2\pi}\sin 2T\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2(x-T)\,H(x-T)$$

şeklinde Green fonksiyonu $\bar{g}(x;T)$ elde edilir. Homojen denklemin çözümü, $\bar{g}(x;T)$de keyfi hareketle $w(x)$ in katı olan $B(t)$ sabitidir. Çünkü ~~$\bar{g}(x;T)$~~ simetrik olmadığından orjinal sınır değer probleminin çözümünü (59) ifadesini kullanmak suretiyle

$$y(x) = \int_0^{\pi} \bar{g}(x;T)\,F(T)\,dT + C\sin 2x \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2(T-x) & T \ge x \\ 0 & T \le x \end{cases}$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{x}{2\pi}\sin 2x\cos 2T + B\sin 2T + \frac{1}{2}\sin 2(T-x)\,H(T-x)\right]F(T)\,dT + C\sin 2x$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\cos 2T\,F(T)\,dT}_{=\frac{x\sin 2x}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos 2T\,F(T)\,dT} + B(x)\int_0^{\pi}\underbrace{\sin 2T\,F(T)\,dT}_{=0} + \frac{1}{2}\int_x^{\pi}\sin 2(T-x)\,F(T)\,dT + C\sin 2x$$

$$y(x) = C_1\sin 2x + \frac{1}{2}\int_x^{\pi}\sin 2(T-x)\,F(T)\,dT$$

şeklinde çözüm elde edilir.

Burada

$$\left.\begin{aligned} Ly &= \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y = F(x) \\ B_1 y &= 0 \\ B_2 y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (52')$$

problemine karşılık gelen

$$\left.\begin{aligned} Ly &= 0 \\ B_1 y &= 0 \\ B_2 y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

probleminin bir çarpımsal sabiti için tek bir aşikâr olmayan (non-trivial) çözüme sahip olduğunu gözönüne almıştık. (53) probleminin tüm çözümlerinin aşikâr olmadığını gözönüne alırsak; bu durumda $Ly=0$ denkleminin $v(x)$ ve $w(x)$ şeklinde iki ortonormal çözümü bulunur. Eğer $\psi(x)$ ve $\varphi(x)$ lineer bağımsız çözümler ise $v(x)$ ve $w(x)$ ortonormal çözümleri

$$v(x) = \psi(x)\left[\int_\alpha^\beta [\psi(x)]^2 dx\right]^{-1/2}$$

$$w(x) = \left[\varphi(x) - \psi(x)\int_\alpha^\beta \varphi(x).v(x)\,dx\right]\left[\int_\alpha^\beta \left(\varphi(x) - v(x)\int_\alpha^\beta \varphi(x).v(x)\,dx\right)^2 dx\right]^{-1/2}$$

dir. [$\psi(x)$, $v(x)$ şeklinde normalleştirilmiştir, $w(x)$ için de $\varphi(x)$'in bileşeni $v(x)$'in doğrultusunda yer değiştirir ve sonuç o zaman normalleştirilir.]

(52') problemi için modifiye Green fonksiyonunu

$$\left.\begin{aligned} L\bar{g} &= \delta(x-T) - v(x)v(T) - w(x)w(T) \\ B_1\bar{g} &= 0 \\ B_2\bar{g} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

probleminin çözümü olarak tanımlarız. Dif. denklemin sağ kısmı (54) koşulunu sağladığından $\bar{g}(x;T)$ gerçekten vardır. O halde (52') probleminin çözümünü C ve D birer keyfî sabit olmak üzere Green özdeşliğinden yararlanarak;

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\bar{g}(x;T)\,F(T)\,dT+C\,w(x)+D\,v(x) \qquad (61)$$

şeklinde elde ederiz.

Ör:

$$\left.\begin{aligned} & y''+y=F(x) \qquad 0<x<2\pi \\ & y(0)=y(2\pi) \\ & y'(0)=y'(2\pi) \end{aligned}\right\}$$ sınır değer probleminin çözümünü bulunuz.

$$\int_0^{2\pi}(\sin^2 x)\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{2\pi}-\cancel{\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{2\pi}}=\pi$$

$$y''+y=0 \Rightarrow r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\mp i \qquad y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

Bu problemin homojen kısmı $\sin x$ ve $\cos x$ non-triviel çözümlere sahip olsun. Bu fonksiyonlar ortogonal olduklarından dolayı bu problem için modifiye Green fonksiyonunu

$$\left.\begin{aligned} & \frac{d^2\bar{g}}{dx^2}+\bar{g}=\delta(x-T)-\frac{1}{\pi}(\sin x\sin T+\cos x\cos T) \\ & \bar{g}(0;T)=\bar{g}(2\pi;T) \\ & \bar{g}'(0;T)=\bar{g}'(2\pi;T) \end{aligned}\right\}$$ probleminin çözümü olarak tanımlanır.

$$\bar{g}'' + \bar{g} = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp i \Rightarrow \bar{g}_h = \begin{cases} A\sin x + B\cos x & 0 \le x < T \\ C\sin x + D\cos x & T < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\bar{g}_0 = x\,(E\sin x + F\cos x)$$

$$\bar{g}_0' = E\sin x + F\cos x + x\cdot\left[E\cos x - F\sin x\right]$$

$$\bar{g}_0'' = 2\left[E\cos x - F\sin x\right] + x\left[-E\sin x - E\cos x\right]$$

$$\bar{g}'' + \bar{g} = -\frac{1}{\pi}\left[\sin x \sin T + \cos x \cos T\right] \Rightarrow$$

$$2\left[E\cos x - F\sin x\right] \equiv -\frac{1}{\pi}\left[\sin x \sin T + \cos x \cos T\right]$$

$$\left.\begin{aligned} 2E &= -\frac{\cos T}{\pi} \Rightarrow E = -\frac{\cos T}{2\pi} \\ -2F &= -\frac{\sin T}{\pi} \Rightarrow F = \frac{\sin T}{2\pi} \end{aligned}\right\} \bar{g}_0 = x\cdot\left[-\frac{1}{2\pi}\sin x \cos T + \frac{1}{2\pi}\cos x \sin T\right]$$

$$= \frac{x}{2\pi}\sin(T - x)$$

$$\bar{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi}\sin(T-x) + \begin{cases} A\sin x + B\cos x & 0 \le x < T \\ C\sin x + D\cos x & T < x \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \bar{g}' = \frac{\sin(T-x)}{2\pi} - \frac{x}{2\pi}\cos(T-x) + \begin{cases} A\cos x - B\sin x & 0 \le x < T \\ C\cos x - D\sin x & T < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\bar{g}(0;T) = \bar{g}(2\pi;T) \Rightarrow \quad B = \underbrace{\sin(T - 2\pi)}_{\sin T \cos 2\pi} + D \Rightarrow B = D + \sin T$$

$$g'(0;T) = g'(2\pi;T) \Rightarrow \cancel{\frac{\sin T}{2\pi}} + A = \cancel{\frac{\sin T}{2\pi}} - \cos T + C$$

$$A = C - \cos T$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A\sin T + B\cos T = C\sin T + D\cos T \\ \underbrace{C\cos T - D\sin T - A\cos T + B\sin T = 1} \\ B = D + \sin T \quad A = c - \cos T \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \bar{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi}\sin(T-x) + \begin{cases} (C-\cos T)\sin x + (D+\sin T)\cos x & 0 \le x < T \\ C\sin x + D\cos x & T < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$= \frac{x}{2\pi}\sin(T-x) + C\sin x + D\cos x + \begin{cases} -\cos T\sin x + \sin T\cos x & 0 \le x < T \\ 0 & T < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$= \frac{x}{2\pi}\sin(T-x) + C\sin x + D\cos x + \begin{cases} \sin(T-x) & 0 \le x \le T \\ 0 & T \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$= C\sin x + D\cos x + \sin(T-x)\begin{cases} \frac{x}{2\pi} + 1 & 0 \le x \le T \\ \frac{x}{2\pi} & T \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$= C\sin x + D\cos x + \sin(T-x)\left[\frac{x}{2\pi} + H(T-x)\right]$$

$\int_0^{2\pi} \sin x . F(x) = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos x . F(x) = 0$ koşulları sağlandığından

$$y(x) = \int_0^{2\pi} \bar{g}(x;T)\,F(T)\,dT + E\sin x + G\cos x$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[c\sin T + D\cos T + \sin(x-T)\left[\frac{T}{2\pi} + H(x-T)\right]\right] F(T)\,dT + E\sin x + G\cos x$$

$$= E\sin x + G\cos x + \int_0^{2\pi} \sin(x-T)\left[\frac{T}{2\pi} + H(x-T)\right] F(T)\,dT$$

Sınır şartları homojen olmayan problemlerin çözümleri için, (53) probleminin tek bir $w(x)$ aşikâr olmayan çözümü olduğu gözönüne alındığında

$$\left.\begin{aligned} Ly = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = F(x) \quad & \alpha < x < \beta \\ B_1 y = m_1 & \\ B_2 y = m_2 & \end{aligned}\right\} (62)$$

probleminin çözümünü

$$y(x) = \int_\alpha^\beta \bar{g}(x;T)\,F(T)\,dT + c\,w(x) - \frac{m_1}{l_1}\,p(\alpha)\,\bar{g}(\alpha;x) - \frac{m_2}{l_2}\,p(\beta)\,\bar{g}(\beta;x) \qquad (63)$$

ya da $\quad l_1 = l_2 = 0 \quad$ olduğunda

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\bar{g}(x;T)\,F(T)\,dT+c\,w(x)-m_2\,p(\beta)\,\bar{g}'_T(\beta;x)-m_1\,p(\alpha)\,\bar{g}'_T(\alpha;x) \qquad (64)$$

denklemlerinden elde edilir.