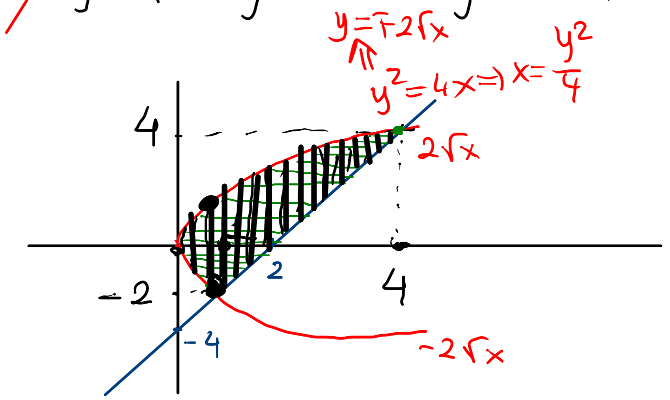
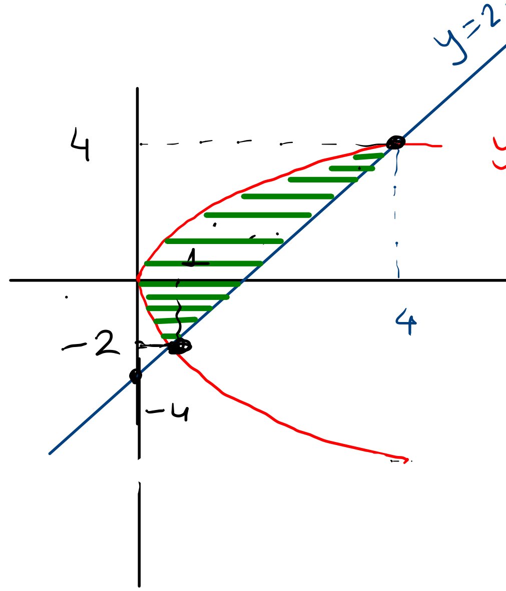
Ör/ $y^2=4x$ eğrisi ile $y=2x-4$ doğrusu arasında kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



- Bölge y'ye göre düzgün çünkü doğrularım (yeşil) hep kırmızı eğri ile mavi doğru arasındadır. Dolayısıyla olan tek bir integral ile hesaplanır.

- Bölge x'e göre düzgün değildir. Çünkü doğrularım (siyah) önce kırmızı eğrinin iki kolu arasında, sonra kırmızı eğri ile mavi doğru arasındadır. Dolayısıyla alan iki integralin toplamı şeklinde hesaplanır.



$y=2x-4 \rightarrow x=\frac{y+4}{2}$

$y^2=4x \Downarrow x=\frac{y^2}{4}$

y'ye göre düzgün seçersek;

$$A=\int_{-2}^{4}\left[\frac{y+4}{2}-\frac{y^2}{4}\right]dy = \frac{y^2}{4}+2y-\frac{y^3}{12}\Big|_{-2}^{4}$$

$$=\left(4+8-\frac{64}{12}\right)-\left(1-4+\frac{8}{12}\right)=15-6=9\text{ br}^2$$

x'e göre düzgün seçersek;

$$A=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-(-2\sqrt{x})\right)dx+\int_1^4\left(2\sqrt{x}-(2x-4)\right)dx$$

$$4x=(2x-4)^2$$
$$4x=4x^2-16x+16$$
$$4x^2-20x+16=0$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-4)(x-1)=0$$
$$x=1 \quad x=4$$

Ör/ $x^2+y^2-2x=0$ dairesi ile $y=x^2$ parabolü arasında kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

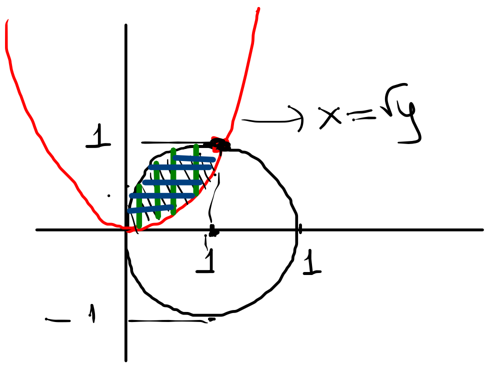
$(x-1)^2+y^2=1$

$y^2=1-(x-1)^2$

$y=\mp\sqrt{1-(x-1)^2}$

$(x-1)^2=1-y^2$

$x=1\mp\sqrt{1-y^2}$



x'e göre

$$A=\int_0^1\left[\sqrt{1-(x-1)^2}-x^2\right]dx$$

y'ye göre

$$A=\int_0^1\left[\sqrt{y}-\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\right]dy$$

$$A=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\int_{-\pi/2}^{0}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt-\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)$$

$x-1=\sin t$

$dx=\cos t\,dt$

$x=1 \Rightarrow t=0$

$x=0 \Rightarrow t=-\pi/2$

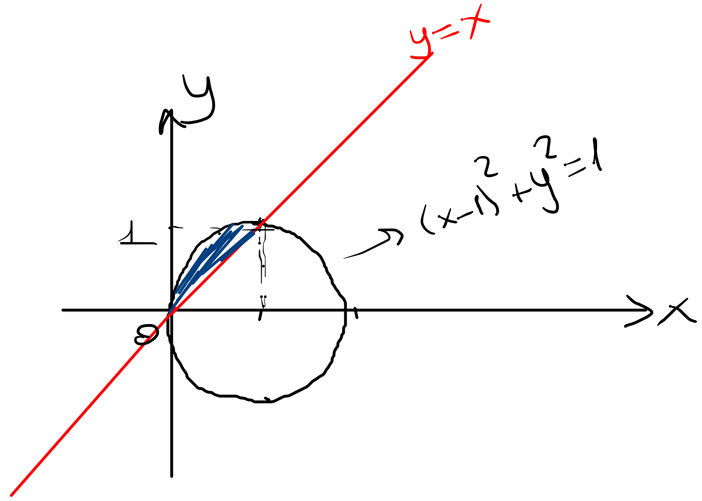
$$=\int_{-\pi/2}^{0}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt-\left(\frac{1}{3}-0\right)$$

$$=\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{-\pi/2}^{0}\right)-\frac{1}{3}=-\left(\frac{-\pi/2}{2}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\ br^2$$

Ör/ $x^2+y^2-2x=0$ dairesi ile $y=x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$(x-1)^2+y^2=1$



$y=\mp\sqrt{1-(x-1)^2}$

$(x-1)^2=1-y^2$

$x=1\mp\sqrt{1-y^2}$

x'e göre

$$A=\int_0^1\left[\sqrt{1-(x-1)^2}-x\right]dx$$

y'ye göre

$y=\sin t$

$dy=\cos t\,dt$

$y=0 \Rightarrow t=0$

$y=1 \Rightarrow t=\pi/2$

$$A=\int_0^1\left[y-\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\right]dy$$

$$=\int_0^1 y\,dy-\int_0^1 dy+\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=\frac{y^2}{2}\Big|_0^1-y\Big|_0^1+\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,.\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}-1+\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

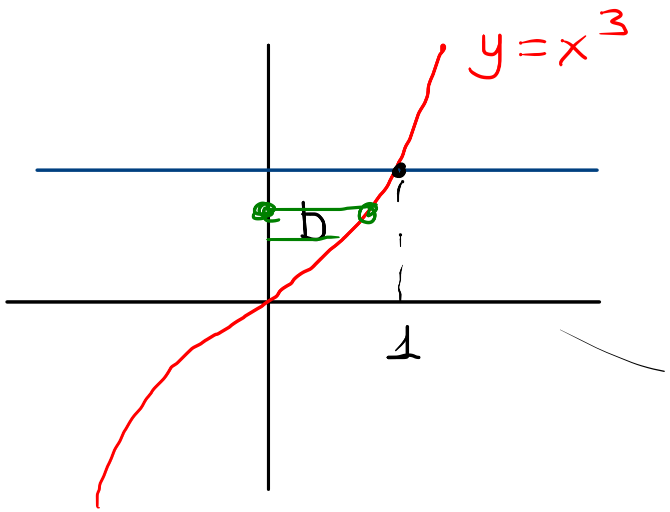
$$A = -\frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2} + \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{-1}{2} + \left[\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) - (0+0)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ br^2$$

Ör/ $y = x^3$ ve $y = 1$ doğruları arasında 1. dörtte bir bölgede kalan kısmın alanını bulunuz.



x'e göre

$$A = \int_0^1 (1 - x^3)\, dx$$

$$= x - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1$$

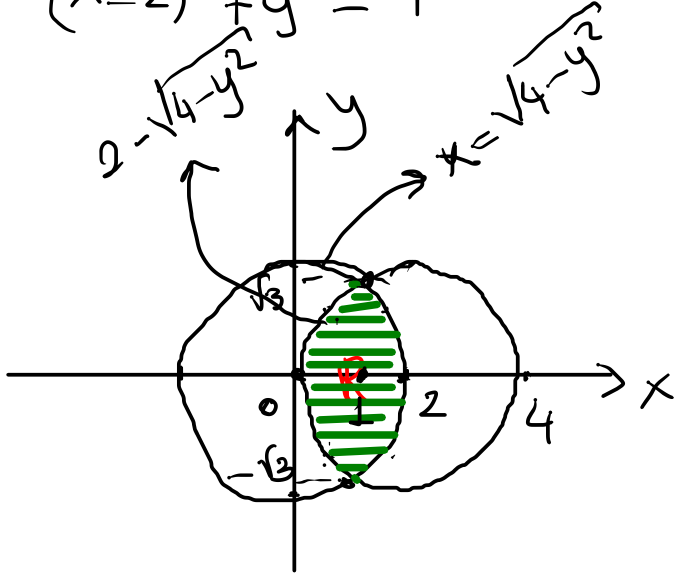
$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \ br^2$$

y'ye göre

$$A = \int_0^1 \sqrt[3]{y}\, dy$$

$$= \frac{y^{4/3}}{4/3} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} \ br^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ \underbrace{x^2+y^2=4x}_{(x-2)^2+y^2=4} \end{array}\right\}$$ çemberleri arasındaki ortak alanı bulunuz.



$4=4x \Rightarrow x=1$

$y=\mp\sqrt{4-(x-2)^2}$

$y=\mp\sqrt{4-x^2}$

y'ye göre

$$A=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left[\sqrt{4-y^2}-\left(2-\sqrt{4-y^2}\right)\right]dy \rightarrow y=2\sin\theta$$

x'e göre

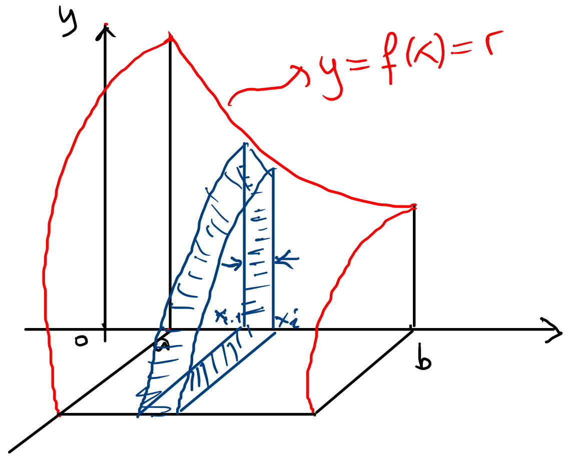
$$A=\int_0^1\left[\sqrt{4-(x-2)^2}-\left(-\sqrt{4-(x-2)^2}\right)\right]dx$$

$$+\int_1^2\left[\sqrt{4-x^2}-\left(-\sqrt{4-x^2}\right)\right]dx$$

Öd/ 1. $x^2+y^2=4$ ve $x^2+y^2=4x$ çemberleri arasındaki ortak alanı bulunuz. $\left(C: \left(\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}\right) br^2\right)$

2. $y=6x-x^2$ ve $y=x^2-2x$ parabolleri arasındaki alanı bulunuz. $\left(C: \frac{64}{3} br^2\right)$

Dönel Cisimlerin Hacimleri

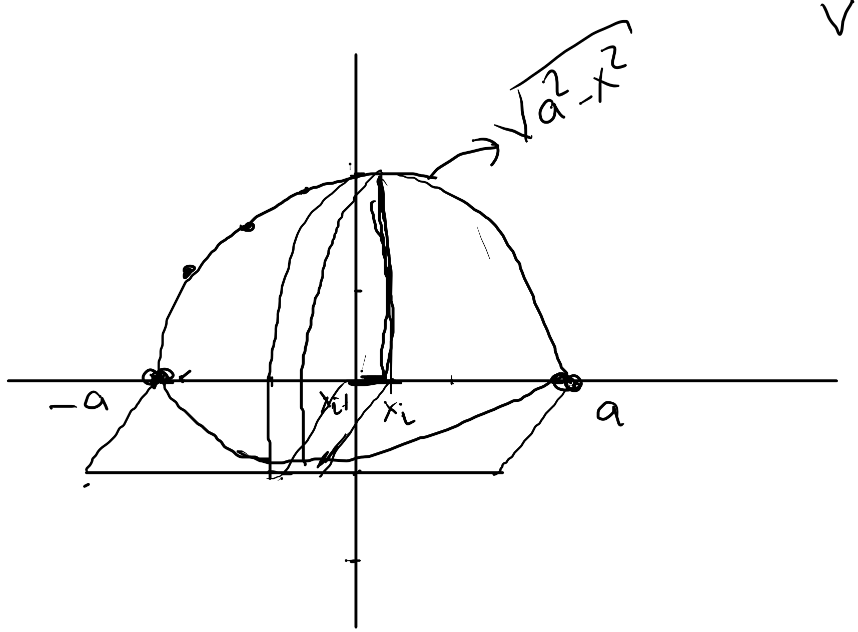


Cisimlerin bir çoğu, düzlemdeki bir eksene dik olan dairesel kesitlere sahiptir. Bir düzlemsel bölgenin, o düzlemdeki bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen böyle cisimlere dönel cisimler denir.

Eğer $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ ve $x=b$ ile sınırlı R bölgesi x-ekseni etrafında döndürülürse, o zaman, x-eksenine x pozisyonunda dik olan düzlemde elde edilen cismin kesiti $|f(x)|$ yarıçapına sahip bir dairesel disk olur. Bu kesitin taban alanı $A(x)=\pi.[f(x)]^2$ ve dolayısıyla dönel cismin hacmi

$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$ (f(x)'in değerleri $x=a$'dan $x=b$'ye değişir, dx kesitin genişliği) olacaktır. (DİSK YÖNTEMİ)

Ör/ Merkezi orijinde olan a yarıçaplı kürenin hacmini bulunuz. $x^2+y^2=a^2$

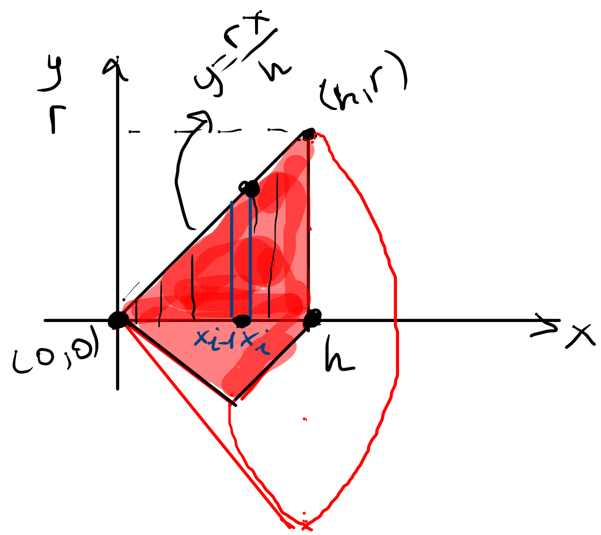


$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left(a^2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^{a}\right) =$$

$$= \pi\left[\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3+\frac{a^3}{3}\right)\right] = \pi . \frac{4a^3}{3} \text{ br}^3$$

Ör/ Köşeleri $(0,0)$, $(h,0)$ ve (h,r) noktalarında olan üçgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan taban yarıçapı r, yüksekliği h olan dik dairesel koninin hacmini bulunuz.



$$\frac{y-0}{r-0}=\frac{x-0}{h-0}$$

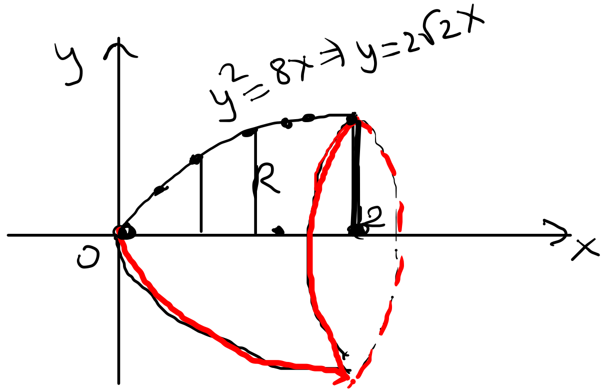
$$y=\frac{rx}{h}$$

$$V=\int_0^h \pi\cdot\left[\frac{rx}{h}\right]^2 dx$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2 h \ \ br^3$$

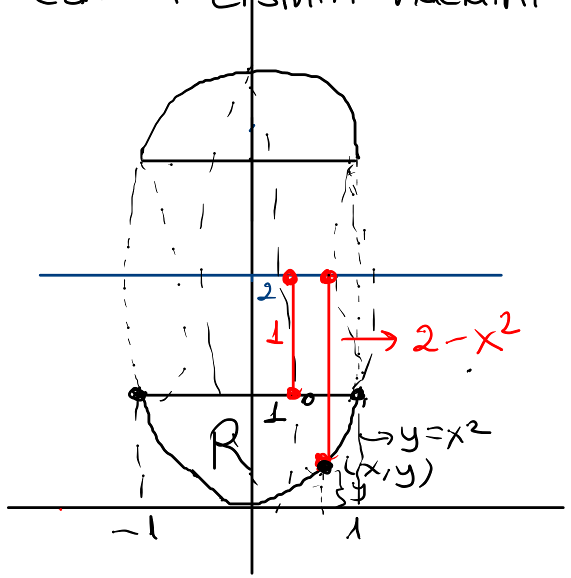
Ör/ $y^2=8x$ parabolünün 1. dörtte bir bölgedeki kısmının $x=2$ doğrusuyla sınırlanması sonucu elde edilen bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$V=\pi\int_0^2 (2\sqrt{2x})^2\,dx=\pi\int_0^2 8x\,dx$$

$$=\pi\cdot 4x^2\Big|_0^2=16\pi\ br^3$$

Ör/ $y=x^2$ eğrisi ve $y=1$ doğrusu ile sınırlı düzlemsel bölgenin $y=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz. (PUL YÖNTEMİ)

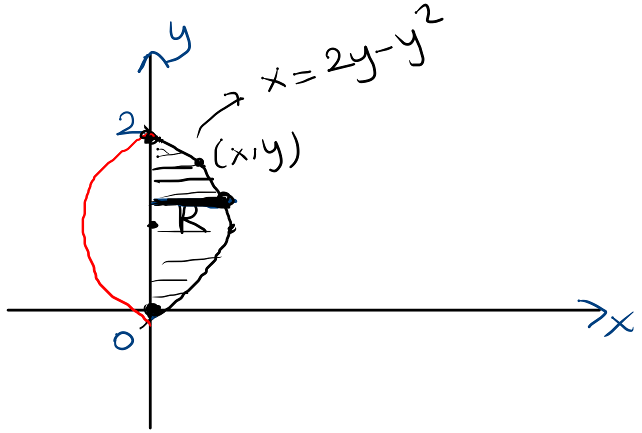


$$V=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2\,dx-\pi\int_{-1}^{1}1^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left[(2-x^2)^2-1\right]dx$$

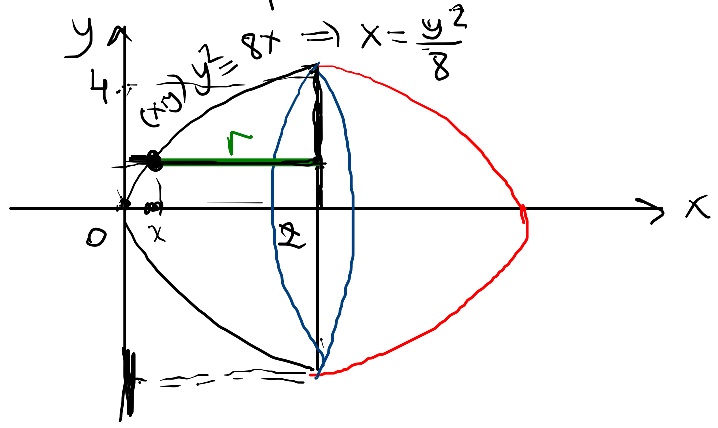
Ör/ $x = 2y - y^2$ eğrisinin solunda ve y-ekseninin sağında kalan bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

$x = 1 - (y-1)^2$



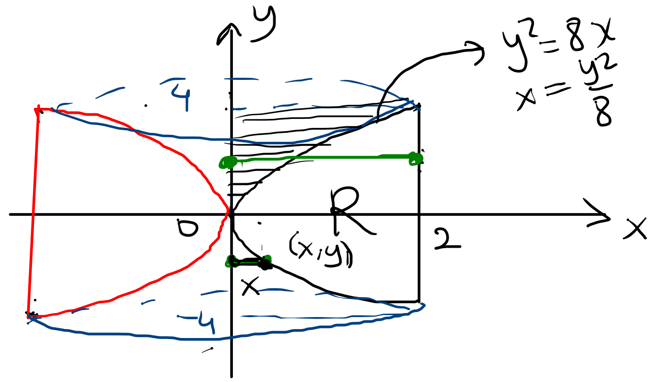
$$V = \pi \int_0^2 (2y - y^2)^2 \, dy = \frac{16}{15} \text{ br}^3$$

Ör/ $y^2 = 8x$ eğrisinin $x = 2$ doğrusuyla sınırlandırılmasıyla elde edilen bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



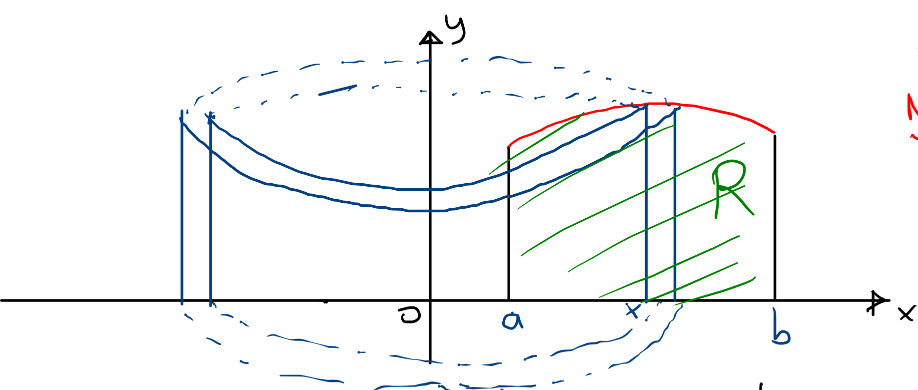
$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy$$

Ör/ $y^2=8x$ eğrisinin $x=2$ doğrusuyla sınırlandığı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini veren integrali yazınız.



$$\frac{V}{2}=\int_0^4 \pi\cdot\left[2^2-\left(\frac{y^2}{8}\right)^2\right]dy$$

Silindirik Kabuk Yöntemi

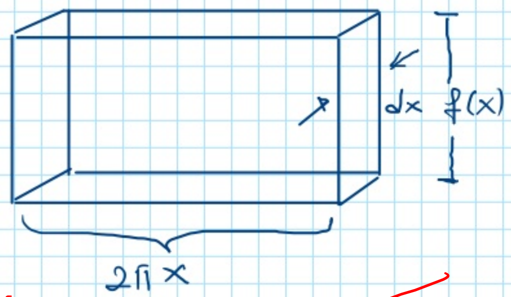


$y=f(x)\geq 0$, $y=0$ $x=a\geq 0$ ve $x=b>a$ ile sınırlı R bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile dönel bir cisim oluşturulsun.

NOT: Düzlemsel dilimler kullanılarak cismin hacmini bulmak için her bir y pozisyonundaki düzlemde kesitsel $A(y)$ alanını bilmemiz gerekir. Bu ise $y=f(x)$ denklemini $x=g(y)$ şeklinde çözmemizi gerektirir. Pratikte bunu yapmak uygun olmadığı gibi imkansızda olabilir.

Silindirik kabuk yönteminde hacmi hesaplamak için şu şekilde bir yol izlenir: Bölgenin x pozisyonundaki standart alan elemanı genişliği dx ve yüksekliği $f(x)$ olan dolayısıyla alanı $dA=f(x)dx$

olan dikey bir şerittir. Bölge y-ekseni etrafında döndürüldüğünde bu şerit kalınlığı dx, yüksekliği f(x) ve yarıçapı x olan bir dairesel silindirik kabuktaki bir hacim elemanını oluşturur. Bu kabuğu,



$$\boxed{V_x = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx}$$

boyutları $2\pi x$, $f(x)$ ve dx olan dikdörtgensel bir dilimin yuvarlanışı olarak gözönüne alabiliriz.

Bunun hacmi $dV = 2\pi x f(x) dx$ olacaktır. Dolayısıyla, dönel cismin hacmi bu şekildeki, yarıçapları a'dan b'ye değişen kabukların hacimleri toplamı olacaktır.

$dV = 2\pi x f(x) dx$

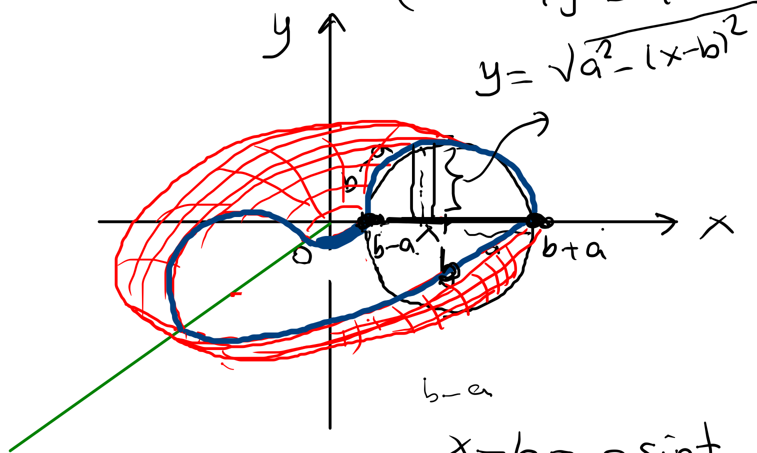
- $x = g(y) \geq 0$, $x = 0$, $y = c \geq 0$, $y = d > c$ ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

$$V_y = \int_c^d 2\pi y g(y) dy$$

Ör/ $b>a>0$ olmak üzere merkezi $(b,0)$ noktasında olan a yarıçaplı bir disk y-ekseni etrafında döndürülerek bir tor oluşturuluyor. Hacmini bulunuz.

$(x-b)^2+y^2=a^2$

$y=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$



$$\frac{V}{2}=\int_{b-a}^{b+a} 2\pi x \cdot \sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx$$

$x-b=a\sin t$

$dx=a\cos t\,dt$

$x=b+a\sin t$

$x=b-a \Rightarrow \sin t=-1$
$t=-\pi/2$

$x=b+a \Rightarrow \sin t=1$
$t=\pi/2$

$\cos t=u$

$-\sin t\,dt=du$

$\sin t\,dt=-du$

$t=-\pi/2 \Rightarrow u=0$

$t=\pi/2 \Rightarrow u=0$

$$=2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(b+a\sin t)\cdot\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt$$

$$=2\pi a^2 b\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt+2\pi a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cos^2 t\,dt$$

$$=2\pi a^2 b\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt+\cancel{2\pi a^3\int_0^0 u^2(-du)} \; 0$$

$$=\pi a^2 b\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)$$

$$=\pi a^2 b\cdot\pi$$

$$=\pi^2 a^2 b \Rightarrow V=2\pi^2 a^2 b \;\; br^3$$