Ör/ $(xy+1)y\,dx + (2y-x)\,dy = 0$ dif. denklemi tam dif. denklem midir? Değilse bir integrasyon çarpanı bularak denklemi çözünüz.

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\underbrace{(xy+1)\cdot y}_{P}\Big] \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(2y-x)}_{Q}$$

$2xy+1 \neq -1$ Tam dif. denk değildir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy+1-(-1) = 2xy+2 = 2(xy+1)$$

$\lambda = \lambda(y)$

$$\ln\lambda = \int \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy$$

$$\ln\lambda = \int \frac{-2\cancel{(xy+1)}}{\cancel{(xy+1)}\cdot y}\,dy$$

$$\ln\lambda = -2\int \frac{dy}{y} = -2\ln y$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{1}{y^2}(xy^2+y)\,dx + \frac{1}{y^2}(2y-x)\,dy = \frac{1}{y^2}\cdot 0$$

$$\underbrace{\left(x+\frac{1}{y}\right)}_{P_1} dx + \underbrace{\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)}_{Q_1} dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{-1}{y^2}$$

$$=$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{-1}{y^2}$$

Tam dif. denk. $\Rightarrow \left(x+\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0 = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

(2)

(1)

(1)'den

(3) $\frac{\partial u}{\partial x} = x + \frac{1}{y} \Rightarrow \int \partial u = \int \left(x + \frac{1}{y}\right) dx \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + h(y)$ (5)

(4) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$

(5)'den y'ye göre türev alalım;

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{dh}{dy}$ (6)

(4) ve (6)'dan

$$\frac{2}{y} - \cancel{\frac{x}{y^2}} = \cancel{-\frac{x}{y^2}} + \frac{dh}{dy} \Rightarrow \frac{dh}{dy} = \frac{2}{y} \Rightarrow \int dh = \int \frac{2}{y} dy \Rightarrow h(y) = 2\ln|y| + c_1$$

h(y) değerini (5)'de yerine yazalım;

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln|y| + c_1} \quad (7)$$

(2)'den $\int du(x,y) = \int 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = C} \quad (8)$

(7) ve (8)'den

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln|y| + c_1 = C \qquad (C - c_1 = k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln|y| = k} \quad \text{G.Ç.}$$

Ör/

$$\underbrace{\left(x - y\sin\frac{y}{x}\right)}_{P} dx + \underbrace{x\sin\frac{y}{x}}_{Q}\, dy = 0$$

dif. denklemini bir integrasyon çarpanı yardımıyla çözünüz.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin\frac{y}{x} - y\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \sin\frac{y}{x} + x\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)\cos\frac{y}{x}$$

$\neq$ T.D.denk değil.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -2\sin\frac{y}{x}$$

$$\lambda = \lambda(x)$$

$$\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx = \int \frac{-2 \cancel{\sin \frac{y}{x}}}{x \cdot \cancel{\sin \frac{y}{x}}} dx = -2 \int \frac{dx}{x} = -2 \ln x \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{1}{x^2}\left[x - y \sin \frac{y}{x}\right] dx + \frac{1}{x^2} x \cdot \sin \frac{y}{x} \, dy = 0$$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}\right]}_{P_1} dx + \underbrace{\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x}}_{Q_1} dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{-1}{x^2} \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x}$$

$$=$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{-1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) \cos \frac{y}{x}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}\right) dx + \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} \, dy}_{} = 0 = \underbrace{du(x,y)}_{} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy}_{}$$

(1) (2)

(1)'den

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}$$

(4) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} \Rightarrow \int \partial u = \int \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} \, dy$$

$$u(x,y) = \frac{-1}{x} \cdot x \cos \frac{y}{x} + h(x)$$

(5) $u(x,y) = -\cos\frac{y}{x} + h(x)$

(5)'den x'e göre türev alalım;

(6) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{dh}{dx}$

(3) ve (6)'dan

$$\frac{1}{x} - \cancel{\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}} = \cancel{\frac{-y}{x^2}\sin\frac{y}{x}} + \frac{dh}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int dh = \int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow h(x) = \ln|x| + c_1$$

h(x) değerini (5)'de yerine yazarsak;

(7) $\boxed{u(x,y) = -\cos\frac{y}{x} + \ln|x| + c_1}$

elde ederiz.

(2)'den

$$du(x,y) = 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = c} \quad (8)$$

(7) ve (8)'den

$$-\cos\frac{y}{x} + \ln|x| + c_1 = c \qquad (c - c_1 = k)$$

$$\boxed{-\cos\frac{y}{x} + \ln|x| = k} \quad \text{G.Ç.}$$

Birinci mertebeden Lineer dif. denklemler

$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ şeklinde y ve y''ne göre Lineer olan denklemlere lineer dif. denklem denir.

$(a(x) \not\equiv 0)$

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y + \frac{c(x)}{a(x)} = 0 \qquad \left(\frac{b(x)}{a(x)} = p(x) \; , \; -\frac{c(x)}{a(x)} = q(x) \right)$$

$y' + p(x)y = q(x) \rightarrow$ Lineer dif. denk.

$q(x) \equiv 0 \Rightarrow$ ikinci tarafsız. (Değişkenlerine ayrılmış denklemdir)

$q(x) \not\equiv 0 \Rightarrow$ ikinci taraflı

Lineer dif. denklemleri çözmek için değişik yöntemler vardır.

1°) Sabitin değişimi yöntemi

$y' + p(x)y = q(x)$ L.D.D.

$q(x) = 0$ farzedelim;

$y' + p(x)y = 0$ D.A.D.D.

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = \int 0 \qquad (y \neq 0)$$

$$\ln|y| + \int p(x)\,dx = \ln c$$

$$\boxed{y = c.e^{-\int p(x)\,dx}}$$

ikinci tarafsız denklemin genel çözümüdür.

Acaba bu çözüm hangi koşul altında ikinci taraflı denklemimizin genel çözümü olur. Araştıralım.

Bu amaçla c parametresinin bir sabit değilde x değişkenine bağlı bir fonksiyon olduğunu düşünelim ve y çözümünün Lineer denklemi sağladığını kabul edelim.

$c = c(x)$

$y = c(x).e^{-\int p(x)\,dx}$

$y' = c'.e^{-\int p(x)\,dx} - c.p(x).e^{-\int p(x)\,dx}$

$$\Rightarrow c'e^{-\int p(x)\,dx} \cancel{- c.p(x).e^{-\int p(x)\,dx}} \cancel{+ p(x)c(x).e^{-\int p(x)dx}} = q(x)$$

$$\Rightarrow \quad c' e^{-\int p(x)\,dx} = q(x) \Rightarrow \quad c' = q(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + k}$$

$$y = c\cdot e^{-\int p(x)\,dx} \Rightarrow \boxed{y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx + k\right]} \quad \text{G.Ç.}$$

Ör/ $y' = y\cot x + \sin x$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' - y\cot x = \sin x$$

$$y' - y\cot x = 0 \qquad \int \frac{dy}{y} - \int \cot x\,dx = \int 0 \Rightarrow \ln|y| - \ln|\sin x| = \ln c$$

$$\boxed{y = c.\sin x}$$ ikinci tarafsız denk. G.Ç.

$$c = c(x) \Rightarrow y = c(x).\sin x$$

$$y' = c'\sin x + c\cos x$$

$$y' - y\cot x = \sin x$$

$$\Rightarrow c'\sin x + c\cos x - c.\sin x.\cot x = \sin x$$

$$\Rightarrow c'\sin x + c\cos x - c.\cancel{\sin x}.\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} = \sin x$$

$$\Rightarrow c'\sin x + \cancel{c\cos x} - \cancel{c\cos x} = \sin x$$

$$\Rightarrow c'\sin x = \sin x \Rightarrow c' = 1 \Rightarrow \boxed{c = x + k}$$

$$y = c.\sin x \Rightarrow y = (x+k).\sin x$$

$$\boxed{y = x\sin x + k\sin x}$$ 1.D.D'in G.Ç.

Ör/

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x$$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$* \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.e^x \quad (x \neq 0)$$ 1.D.D.

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = \int 0 \quad (y \neq 0)$$

$$\ln|y| - \ln|x| = \ln c \Rightarrow \boxed{y = c.x}$$

ikinci tarafsız denk. G.Ç.

$$c = c(x) \Rightarrow y = c(x).x$$ *'da yerine yazalım;

$$y' = c'x + c \Rightarrow c'x + \cancel{c} - \frac{1}{\cancel{x}}.c\cancel{x} = xe^x \Rightarrow c'x = xe^x$$

$$c' = e^x \Rightarrow \boxed{c = e^x + k}$$

$$\boxed{y = (e^x + k) \cdot x} \quad G.Ç.$$

2. integrasyon çarpanı

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + [p(x)y - q(x)] = 0$$

$$\underbrace{\ }_{Q}dy + \underbrace{[p(x)y - q(x)]}_{P}\,dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = p(x) \neq \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = p(x)$$

$$\ln\lambda = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx = \int p(x)\,dx$$

$$\boxed{\lambda = e^{\int p(x)\,dx}} \quad \text{int. çarpanı.}$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx}\,[p(x)y - q(x)]\,dx + e^{\int p(x)dx}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) \cdot y\,dx + e^{\int p(x)dx}\,dy\right]}_{d\left(y \cdot e^{\int p(x)dx}\right)} - e^{\int p(x)dx}\,q(x)\,dx = 0$$

$$d\left(y \cdot e^{\int p(x)dx}\right) - e^{\int p(x)dx}\,q(x)\,dx = 0$$

$$d\left(y \cdot e^{\int p(x)dx}\right) - q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int d\left(y \cdot e^{\int p(x)dx}\right) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$$

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + k$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + k\right]} \quad \text{G.Ç.}$$

Ör/ $y' + y\sin x = xe^{\cos x}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$p(x) = \sin x \qquad q(x) = xe^{\cos x} \qquad \lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \sin x \, dx} = e^{-\cos x}$

$$y' e^{-\cos x} + y\sin x . e^{-\cos x} = x$$

$$\underbrace{y\sin x . e^{-\cos x} dx + e^{-\cos x} dy}_{\int d\left(y . e^{-\cos x}\right)} = x\, dx$$

$$\int d\left(y . e^{-\cos x}\right) = \int x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad y . e^{-\cos x} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} e^{\cos x} + c . e^{\cos x}}$$

G.Ç.

Ör

$$\frac{dI}{dt} - 6I = 10\sin 2t$$

dif. denkleminde $t=0$ iken $I=0$ olduğu bilindiğine göre istenen koşula uygun çözümü bulunuz.

$p(t) = -6$

$q(t) = 10\sin 2t$

$$\lambda = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -6dt} = e^{-6t}$$

$$e^{-6t}\frac{dI}{dt} - 6I e^{-6t} = e^{-6t} . 10 . \sin 2t$$

$$\underbrace{e^{-6t} dI - 6I e^{-6t} dt}_{d\left(e^{-6t} I\right)} = 10 e^{-6t} \sin 2t\, dt$$

$$\int d(e^{-6t} I) = \int 10 e^{-6t} \sin 2t \, dt$$

$$e^{-6t} I = 10 \underbrace{\int e^{-6t} \sin 2t \, dt}_{J} + k \Rightarrow I = e^{6t}\left[-\frac{1}{2}e^{-6t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-6t}\sin 2t\right] + k.e^{6t}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{2}\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t + k.e^{6t}} \quad \text{G.G.}$$

$$J = \int \underbrace{e^{-6t}}_{u} \underbrace{\sin 2t \, dt}_{dv} = -\frac{1}{2}e^{-6t}\cos 2t - \int \frac{6}{2}e^{-6t}\cos 2t \, dt$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-6t}\cos 2t - 3\int \underbrace{e^{-6t}}_{u} \underbrace{\cos 2t \, dt}_{dv} = -\frac{1}{2}e^{-6t}\cos 2t - 3\left[\frac{1}{2}e^{-6t}\sin 2t + 3\int e^{-6t}\sin 2t \, dt\right]$$

$e^{-6t} = u$

$-6e^{-6t} dt = du$

$\sin 2t \, dt = dv$

$-\frac{1}{2}\cos 2t = v$

$u = e^{-6t}$

$du = -6e^{-6t}$

$\cos 2t \, dt = dv$

$\frac{1}{2}\sin 2t = v$

$$= -\frac{1}{2}e^{-6t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-6t}\sin 2t - 9\int e^{-6t}\sin 2t \, dt$$

$$\Rightarrow J + 9J = -\frac{1}{2}e^{-6t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-6t}\sin 2t$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{10}\left[-\frac{1}{2}e^{-6t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-6t}\sin 2t\right]$$

$t=0 \Rightarrow I=0 \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2}\underbrace{\cos 0}_{1} - \frac{3}{2}\underbrace{\sin 0}_{0} + k.\underbrace{e^{0}}_{1} \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$

$$\boxed{I = -\frac{1}{2}\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}e^{6t}}$$

istenen özel çözümdür.

Lineer Hale Getirilebilen Denklemler

1°) Bernoulli dif. denklemi

Lineer dif. (n=0)

Değişkenlerine Ayrılabilir (n=1)

$y' + p(x)y = q(x)y^{n}$ $\quad (n \neq 0, n \neq 1)$ şeklindeki denklemlerdir.

Çözüm için öncelikle $y \neq 0$ olduğu düşünülerek her terim y^{n} ile bölünür,

$$(**) \quad \frac{y'}{y^{n}} + p(x).\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$$

$\frac{1}{y^{n-1}} = z(x)$ dönüşümü yapılır. Türev alınırsa;

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\underbrace{y^{n-1}}_{}}\Big) = \frac{d}{dx} z(x)$$

$$\overbrace{\tfrac{1}{y^{n-1}}}^{y^{-n+1}}$$

$$(-n+1)\, y' \cdot y^{-n} = z'$$

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{-n+1}$$

$\Rightarrow$ Tüm dönüşümler verilen denklemde (**'da) yerine yazılırsa;

$$\frac{z'}{-n+1} + p(x) z = q(x)$$

$$z' + (1-n) p(x) z = (1-n) q(x) \quad \text{L.D.D. elde edilir.}$$

Lineer dif. denklem çözüldüğünde $z = \varphi(x, c)$ şeklinde genel çözüm bulunur. Ancak verilen dif. denklemin değişkeni y olduğundan

$\frac{1}{y^{n-1}} = z$ dönüşümünden verilen dif. denklemin genel çözümü

$$\boxed{y = \left[\frac{1}{\varphi(x,c)}\right]^{1/n-1}}$$

olarak elde edilir.

Ör/ $y'+y=xy^3$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'+y=xy^3$ Bernoulli dif. denk.

$$\frac{y'}{y^3}+\frac{1}{y^2}=x$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{y^2}=z \\ \dfrac{-2y'}{y^3}=z' \Rightarrow \dfrac{y'}{y^3}=\dfrac{-z'}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-z'}{2}+z=x$$

$z'-2z=-2x$ L.D.D.

$p(x)=-2$

$q(x)=-2x$

$$\lambda=e^{\int p(x)dx}=e^{\int -2dx}=e^{-2x}$$

$$e^{-2x}z'-2ze^{-2x}=-2e^{-2x}\cdot x$$

$$\underbrace{e^{-2x}dz-2ze^{-2x}dx}=-2xe^{-2x}dx$$

$$\int d(z.e^{-2x})=\int -2xe^{-2x}dx$$

$$z.e^{-2x}=-2\int xe^{-2x}dx+k$$

$$\left.\begin{array}{l}x=u \\ dx=du \\ e^{-2x}dx=dv \\ -\frac{1}{2}e^{-2x}=v\end{array}\right\} \Rightarrow z.e^{-2x}=-2\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right]+k$$

$$z=e^{2x}\left[xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+k\right]$$

Lineer dif. denk'in G.Ç. $\leftarrow$ $\boxed{z=x+\frac{1}{2}+ke^{2x}}$

$$\frac{1}{y^2}=z \Rightarrow y^2=\frac{1}{z} \Rightarrow y^2=\frac{1}{x+\frac{1}{2}+ke^{2x}} \Rightarrow \boxed{y=\mp\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}+ke^{2x}}\right)^{1/2}}$$

→ Bernoulli dif. denk.'nin G.Ç.

Ör/ $y'-\frac{y}{3x}=y^4\ln x$ dif. denk.'nin genel çözümünü bulunuz.

Bernoulli dif. denk.

$$\frac{y'}{y^4}-\frac{1}{3xy^3}=\ln x$$

$$\frac{1}{y^3}=z \Rightarrow -3\frac{y'}{y^4}=z'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^4}=\frac{-z'}{3}$$

$$-\frac{z'}{3}-\frac{z}{3x}=\ln x \Rightarrow z'+\frac{z}{x}=-3\ln x \quad \text{L.D.D.}$$

$$z'+\frac{z}{x}=0 \Rightarrow \int\frac{dz}{z}+\int\frac{dx}{x}=\int 0 \Rightarrow \ln z+\ln x=\ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{c}{x}}$$

ikinci tarafsız denk.'in genel çöz.

$$c=c(x) \Rightarrow z'=\frac{c'x-c}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{c'}{x}-\frac{c}{x^2}+\frac{\frac{c}{x}}{x}=-3\ln x \Rightarrow \frac{c'}{x}-\cancel{\frac{c}{x^2}}+\cancel{\frac{c}{x^2}}=-3\ln x$$

$\Rightarrow c' = -3x \ln x$

$\Rightarrow c = -3\int x \ln x \, dx + k = -3\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx\right] + k$

$= -3\,\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{3}{4}x^2 + k$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$x\,dx = dv$

$\frac{x^2}{2} = v$

$z = \frac{c}{x} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{3x}{2}\ln x + \frac{3x}{4} + \frac{k}{x}}$ L.D.D'in G.G.

$\frac{1}{y^3} = z \Rightarrow y^3 = \frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{3x}{2}\ln x + \frac{3x}{4} + \frac{k}{x}} \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{1}{-\frac{3x^2}{2}\ln x + \frac{3x}{4} + \frac{k}{x}}\right)^{1/3}}$

Bernoulli dif. denk'inin G.G.

Ör/ $y'y^3 + \frac{y^4}{x} = x^2$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y' + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^3} = x^2 \cdot y^{-3}$ Bernoulli dif. denk.

$$y^4 = z \Rightarrow 4y^3y' = z' \Rightarrow y^3y' = \frac{z'}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{4} + \frac{z}{x} = x^2 \Rightarrow z' + \frac{4z}{x} = 4x^2 \quad \text{L.D.D.}$$

$$p(x) = \frac{4}{x} \qquad \lambda = e^{\int p(x)\,dx}$$

$$q(x) = 4x^2 \qquad \lambda = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\ln x} = x^4$$

$$x^4 z' + 4x^3 z = 4x^6$$

$$\underbrace{x^4 dz + 4x^3 z\,dx}_{\int d(z.x^4)} = 4x^6 dx$$

$$\int d(z.x^4) = \int 4x^6 dx$$

$$z.x^4 = 4\frac{x^7}{7} + k$$

$$\boxed{z = \frac{4}{7}x^3 + k.x^{-4}}$$ L.D.D'in G.Ç.

$$y^4 = z \Rightarrow \boxed{y = z^{1/4} = \left[\frac{4}{7}x^3 + kx^{-4}\right]^{1/4}}$$

Bernoulli dif. denk'nin G.Ç.

2°) Riccati dif. denklemi

$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ şeklindeki denklemlerdir. Bu denklemlerin genel çözümü ancak ve ancak bir özel çözümünün bilinmesi durumunda bulunabilir. Aksi halde denklem çözülemez. Denklemin bir özel çözümü $y = y_1$ ise y_1 denklemi sağlar. Yani

$$y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) \text{ dir.}$$

Denklemi çözmek için $u=u(x)$ bulunması gereken fonksiyon olmak üzere

1°) $y=y_1+u$ dönüşümü yapılırsa denklem Bernoulli dif. denklemine,

2°) $y=y_1+\frac{1}{u}$ dönüşümü yapılırsa denklem Lineer dif. denkleme dönüşür. İkinci dönüşüm

Riccati dif. denk.'ni çözmek için seçilmelidir.

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1 + \frac{1}{u} \\ y' &= y_1' - \frac{u'}{u^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x)\left[y_1 + \frac{1}{u}\right]^2 + Q(x).\left[y_1 + \frac{1}{u}\right] + R(x)$$

$$\Rightarrow \; y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x)\left[y_1^2 + \frac{2y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right] + Q(x)y_1 + \frac{1}{u}Q(x) + R(x)$$

$$\cancel{y_1'} - \frac{u'}{u^2} = \underbrace{P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)}_{y_1'} + \left[\frac{2P(x)}{u} + Q(x)\right]y_1 + \frac{1}{u}Q(x)$$