

Tam kareye tamamlama

Çarpanların a ayrılması var

$$Ax^2 + Bx + C = A \left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} \right)$$

$$= A \left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{B^2}{4A^2} \right)$$

$$= A \left[\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} \right) + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} \right) \right]$$

$$= A \left(x + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}$$

$$\begin{aligned} & \overbrace{x^2 + x + 1} \\ & \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \\ & x^2 + x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$x + \frac{B}{A} = u$$

ör/ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$
 $= \arcsin(x-1) + C$

$$\begin{aligned} x-1 &= u \\ dx &= du \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int \frac{x dx}{4x^2 + 12x + 13} = \frac{1}{8} \int \frac{8x dx}{4x^2 + 12x + 13} = \frac{1}{8} \int \frac{8x + 12 - 12}{4x^2 + 12x + 13} dx = \frac{1}{8} \int \frac{(8x + 12) dx}{4x^2 + 12x + 13} - \frac{12}{8} \int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 13}$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{du}{u} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{4(x^2 + 3x + \frac{13}{4})}$$

$$4x^2 + 12x + 13 = u$$

$$(8x + 12) dx = du$$

$$= \frac{1}{8} \ln |u| - \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x^2 + 3x + \frac{13}{4}}$$

$$= \frac{1}{8} \ln |4x^2 + 12x + 13| - \frac{3}{8} \int \frac{dx}{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{13}{4}} = \frac{1}{8} \ln |4x^2 + 12x + 13| - \frac{3}{8} \int \frac{dx}{(x + \frac{3}{2})^2 + 1}$$

$$x + \frac{3}{2} = t$$

$$= \frac{1}{8} \ln |4x^2 + 12x + 13| - \frac{3}{8} \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$dx = dt$$

$$= \frac{1}{8} \ln |4x^2 + 12x + 13| - \frac{3}{8} \arctan t + c = \frac{1}{8} \ln |4x^2 + 12x + 13| - \frac{3}{8} \arctan(x + \frac{3}{2}) + c$$

$$\int \frac{dt}{3t^2 + 4}$$

$$\sqrt{3} t = 2 \tan \theta$$

$\tan \frac{\theta}{2}$ dönüşümü

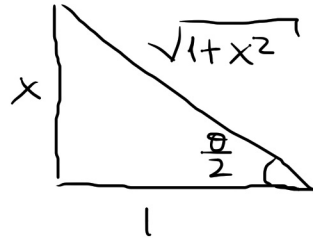
İntegre edilecek olan fonksiyon sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bir rasyonel fonksiyonu olarak verildiğinde kullanılan bir dönüşümdür.

$$x = \tan \frac{\theta}{2} \rightarrow \text{integral değişkeni.}$$

$$dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) d\theta$$

$$2 dx = (1 + x^2) d\theta$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{2 dx}{1 + x^2}$$



$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \int \frac{\frac{2 dx}{1+x^2}}{2 + \frac{1-x^2}{1+x^2}} = 2 \int \frac{dx}{3+x^2} = 2 \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2 + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}} \right] + C$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} &= x \\ d\theta &= \frac{2 dx}{1+x^2} \\ \cos \theta &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{-\frac{2t}{1+t^2}+1} = 2 \int \frac{dt}{(t-1)^2} = 2 \int \frac{du}{u^2} = \frac{-2}{u} + C = \frac{-2}{t-1} + C = \frac{-2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1} + C$$

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

$$t-1 = u$$

$$dt = du$$

$$\frac{2dt}{1+t^2} = dx$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$$

RASYONEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ

$P(x)$ m. dereceden ve $Q(x)$ n. dereceden polinomlar olmak üzere $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ şeklindeki integrallerdir.

Eğer $m \geq n$ ise polinom bölmesi ile çözüme gidilir.

$$\begin{array}{r} P(x) \overline{) \frac{Q(x)}{R(x)}} \\ \hline S(x) \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} \rightarrow \text{derecesi } n \text{ 'den küçük}.$$

$$\text{ör} \int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} dx = \int \left[x + 3 + \frac{(-x-3)}{x^2+1} \right] dx = \int x dx + 3 \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} - 3 \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^3 + x \quad | \quad x + 3 \\ \hline 3x^2 - x \quad | \quad \\ -3x^2 + 3 \quad | \quad \\ \hline -x - 3 \end{array}$$

$$\text{ör} \int \frac{x dx}{2x-1} = \int \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} \right] dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$$

$$\begin{array}{r} x \quad | \quad 2x-1 \\ -x + \frac{1}{2} \quad | \quad \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \end{array}$$

Eğer $m < n$ ise paydadaki polinomun derecesine bağlı olarak çözüme girer.

1^o) Paydadaki 1. dereceden (Lineer) bir polinom varsa

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{\frac{du}{a}}{u} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{a} \ln|u| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$ax+b=u$$

$$a dx = du$$

$$dx = \frac{du}{a}$$

2°) Paydada 2-dereceden (kuadratik) bir polinom bulunuyorsa;

2-dereceden bir ifade daima kareye tamamlanarak ve uygun değişken dönüşümü yapılarak x^2+a^2 veya x^2-a^2 şekline getirilebilir. Bu durumda pay ya $AX+B$ şeklinde ya da D şeklinde olacağından karşılaştığımız rasyonel integraller

$$\int \frac{x dx}{x^2+a^2}, \int \frac{x dx}{x^2-a^2}, \int \frac{dx}{x^2+a^2}, \int \frac{dx}{x^2-a^2} \text{ integrallerine benzer olacaktır.}$$

İlk üç integral şu ana kadar öğrendiğimiz bilgilerle rahatlıkla çözülebileceğimiz integrallerdir. İlk iki integralde $x^2 \pm a^2 = u$ dönüşümü yapılarak integral çözülür. 3. integral ise integrandının hangi fonksiyonun türevidir sorusuna cevap verebildiğimiz ya da $x = a \tan t$ dönüşümü ile çözülebileceğimiz bir integraldir.

4. integral ise yeni bir yöntem olarak göreceğimiz basit kesirlere ayırma yöntemi ile çözülebilir.

$\frac{1}{x^2-a^2}$ ifadesini iki kesrin toplamı şeklinde ifade etmeye çalışalım:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)} = \frac{A(x+a) + B(x-a)}{(x+a)(x-a)}$$


$$1 \equiv Ax + Aa + Bx - Ba$$

$$\Rightarrow 1 \equiv x(A+B) + a(A-B) \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array}$$

$$\frac{2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2a}, B=-\frac{1}{2a}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{x-a} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+a} \right] dx = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| + C$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

$Q(x)$ 'in n . dereceden olduğunu ve çarpanlarına ayrılabilirliğini kabul edelim. Bu durumda $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesini basit kesirlerin toplamı şeklinde ifade edebiliriz.

1°) $Q(x)$ 'in çarpanları birbirinden farklı reel köklere sahip çarpanlar ise

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \text{ şeklinde ise,}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n} \quad \text{şeklinde yazılır. Amacımız } A_1, A_2, \dots, A_n$$

katsayılarını bulmaktır. Bu katsayıları bulmak için bir yol payda eşitlemek ve polinom özdeşliğinden istenilene ulaşmaktır ($\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ örneğinde olduğu gibi)

Diğer bir yol ise;

$$A_i = \lim_{x \rightarrow a_i} \cancel{(x-a_i)} \cdot \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots\cancel{(x-a_i)}\dots(x-a_n)} = \frac{P(a_i)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}$$

şeklinde limit hesabıdır.

$$\text{Ör/} \int \frac{(x+4) dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{(x+4) dx}{(x-2)(x-3)} = \int \left[\frac{-6}{x-2} + \frac{7}{x-3} \right] dx = -6 \int \frac{dx}{x-2} + 7 \int \frac{dx}{x-3} \\ = -6 \ln|x-2| + 7 \ln|x-3| + C$$

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} =$$

$$A = \frac{6}{-1} = -6, B = \frac{7}{1} = 7$$

$$\text{Or } \int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx = \int \left[1 + \frac{x+2}{x^3-x} \right] dx = \int dx + \int \frac{(x+2)dx}{x^3-x} = x + \int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} dx$$

$$\begin{array}{r} x^3+2 \overline{) x^3-x} \\ \underline{-x^3+x} \\ x+2 \end{array}$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$x+2 \equiv A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$x+2 \equiv (A+B+C)x^2 + (B-C)x + (-A)$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B+C=0 \Rightarrow B+C=2 \\ B-C=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B=\frac{3}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\therefore A=2 \Rightarrow A=-2$$

$$= x + \int \left[-\frac{2}{x} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right] dx$$

$$= x + -2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

2°) $Q(x)$ 'in çarpanlarında ~~ikinci dereceden çarpanlarına ayrılamayan~~ ~~kompleks köklü çarpanlar~~ ~~varsa~~ ise;

$$Q(x) = (x^2 + a_1^2)(x - a_3)(x - a_4) \dots (x - a_n)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + A_2}{x^2 + a_1^2} + \frac{A_3}{(x - a_3)} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Payda eşitlenir ve polinom özdeşliğinden bilinmeyen katsayılar bulunur

ör/
$$I = \int \frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} dx = \int \left[\frac{2}{x} + \frac{-x + 3}{x^2 + 1} \right] dx = 2 \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} + 3 \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$= 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 3 \arctan x + C$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 \equiv A(x^2 + 1) + (Bx + C) \cdot x$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 \equiv (A + B)x^2 + Cx + A$$

$$A + B = 1$$

$$C = 3$$

$$A = 2 \Rightarrow B = -1$$

$$\cancel{\text{Or}} \int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 1 \equiv A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$1 \equiv (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A+C$$

$$A+B=0$$

$$-A+B+C=0$$

$$A+C=1$$

$$-2A+C=0$$

$$A+C=1$$

$$3C=2$$

$$C=\frac{2}{3} \Rightarrow A=\frac{1}{3} \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

$$\Rightarrow \int = \int \left[\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{x}{3} + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2-x+1=u \\ (2x-1)dx=du \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{2x-4}{x^2-x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1} dx - \frac{(-3)}{6} \int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$I = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|u| + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

3°) Paydadaki 1. dereceden ve 2. dereceden çarpanların tekrarlanması durumu

$$x - \frac{1}{2} = t \Rightarrow dx = dt$$