Teorem 2:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=0 \qquad \alpha<x<\beta \\ &B_1y=-l_1y'(\alpha)+h_1y(\alpha)=0 \\ &B_2y=l_2y'(\beta)+h_2y(\beta)=0 \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

homojen sistemi sadece aşikâr çözüme sahip ise $u(x)$ ve $v(x)$ bu sistemin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere (27) ile verilen sınır şartlarını sağlayan, (26) probleminin Green fonksiyonu, A ve C bulunması gereken sabitler olmak üzere

$$g(x;T)=Au(x)+Cv(x)+\frac{1}{J(u,v)}\left[u(x)v(T)H(T-x)+u(T)v(x)H(x-T)\right] \quad (30)$$

şeklinde tek olarak ifade edilir.

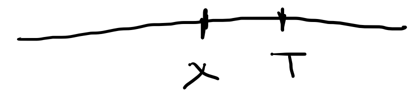
İSPAT: $Ly=0$ dif. denkleminin sürekli ve türeve sahip iki çözümü $u(x)$ ve $v(x)$ olsun. u ve v fonksiyonları Green fonksiyonu için verilen 3. özelliğe göre $g(x;T)$ fonksiyonunu

$$g(x;T)=\begin{cases} Eu(x)+Bv(x) & \alpha\leq x<T \\ F\,u(x)+Dv(x) & T<x\leq\beta \end{cases} \qquad g'(x;T)=\begin{cases} Eu'+Bv' & \alpha\leq x<T \\ Fu'+Dv' & T<x\leq\beta \end{cases}$$

şeklinde ifade etmemizi sağlar.

$$Eu(T)+Bv(T)=Fu(T)+Dv(T) \quad \text{(1. özellikten)}$$

$$Fu'(T)+Dv'(T)-Eu'(T)-Bv'(T)=\frac{1}{p(T)}$$



$x<T$

$T<x$

$$v'(T)\ /\ Bv(T)-Fu(T)=Dv(T)-Eu(T)$$

$$v(T)\ /\ Fu'(T)-Bv'(T)=\frac{1}{p(T)}+Eu'(T)-Dv'(T)$$

$$-\begin{vmatrix} u & u' \\ v & v' \end{vmatrix}$$

$$F\left[u'(T)v(T)-v'(T)u(T)\right]=E\left[u'(T)v(T)-v'(T)u(T)\right]+\frac{v(T)}{p(T)}$$

$$J(u,v)=p(T).\left[uv'-vu'\right]$$

$$F=E+\frac{v(T)}{-J(u,v)}=E-\frac{v(T)}{J(u,v)}$$

$$Bv(T)-\left[E-\frac{v(T)}{p(T)J(u,v)}\right]u(T)=Dv(T)-Eu(T)$$

$$Bv(T)=Dv(T)-\frac{u(T)v(T)}{J(u,v)} \Rightarrow B=D-\frac{u(T)}{J(u,v)}.$$

$$g(x;T)=\begin{cases} Eu(x)+\left[D-\dfrac{u(T)}{J(u,v)}\right]v(x) & \alpha \le x \le T \\ \left[E-\dfrac{v(T)}{J(u,v)}\right]\cdot u(x)+Dv(x) & T \le x \le \beta \end{cases}$$

$$H(x-x_0)=\begin{cases} 1 & x>x_0 \\ 0 & x<x_0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} Eu(x)+Dv(x)-\dfrac{v(x)\cdot u(T)}{J(u,v)} & \alpha \le x \le T \\ Eu(x)+Dv(x)-\dfrac{v(T)\;u(x)}{J(u,v)} & T \le x \le \beta \end{cases}$$

$$1-H(x-x_0)=\begin{cases} 0 & x>x_0 \\ 1 & x<x_0 \end{cases}$$

$$= Eu(x)+Dv(x)-\frac{1}{J(u,v)}\left[v(x)\,u(T)\;\;H(T-x)+v(T)\,u(x)\;\;H(x-T)\right]$$

$$= Eu(x)+Dv(x)-\frac{1}{J(u,v)}\left[u(T)\,v(x)\left[1-H(x-T)\right]+v(T)\,u(x)\cdot\left[1-H(T-x)\right]\right]$$

$$= Eu(x)-\frac{u(x)\,v(T)}{J(u,v)}+Dv(x)-\frac{u(T)\,v(x)}{J(u,v)}+\frac{1}{J(u,v)}\left[u(x)\,v(T)\,H(T-x)+u(T)\,v(x)\;H(x-T)\right]$$

$$=\underbrace{\left[E-\frac{v(T)}{J(u,v)}\right]}_{A}u(x)+\underbrace{\left[D-\frac{u(T)}{J(u,v)}\right]}_{C}v(x)+\frac{1}{J(u,v)}\left[u(x)\,v(T)\,H(T-x)+u(T)\,v(x)\,H(x-T)\right]$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{(u,v)}} \left[u(x)v(T)\, H(T-x) + u(T)v(x)\, H(x-T) \right]$$ alınırsa

$$B_1 g = A B_1 u + C B_1 v + B_1 r = 0$$

$$B_2 g = A B_2 u + C B_2 v + B_2 r = 0$$

olacaktır.

$$A B_1 u + C B_1 v = - B_1 r$$
$$A B_2 u + C B_2 v = - B_2 r$$

$$\begin{vmatrix} B_1 u & B_1 v \\ B_2 u & B_2 v \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} B_1 u & B_1 v \\ B_2 u & B_2 v \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow B_1 u = \lambda B_1 v \quad , \quad B_2 u = \lambda B_2 v$$

$$B_1 (u - \lambda v) = 0 \qquad B_2 (u - \lambda v) = 0$$

Sonuç olarak; homojen sınır değer probleminin ancak ve ancak lineer bağımlı çözümleri varsa problem $u-\lambda v$ aşikâr olmayan çözümüne sahip olacaktır.

Teorem 3.

(29) homojen sistemi sadece aşikar çözüme sahip ve sınır şartları karışık olmadığında sistemin lineer bağımsız u ve v çözümleri sınır şartlarını sağlıyorsa (26) problemi için Green fonksiyonu

$$g(x;T) = \frac{1}{J(u,v)}\left[u(x)v(T)H(T-x) + u(T)v(x)H(x-T)\right] \quad (31)$$

şeklinde tek türlü belirlenir.

$$Lg = 0$$

$$B_1 u = 0 = B_2 u = B_2 v = B_1 v$$

$$B_1 g = A\underbrace{B_1 u}_{=0} + C\underbrace{B_1 v}_{=0} - B_1 r = 0$$

$$B_1 g = B_1 r$$

$$B_2 g = AB_2 u + CB_2 v - B_2 r = 0$$

$$B_2 g = B_2 r$$

$$\left.\begin{matrix} B_1 g = B_1 r \\ B_2 g = B_2 r \end{matrix}\right\} g = r$$

Ör $-\tau y'' = F(x) \quad 0<x<L$

$y(0)=y(L)=0$ } probleminin Green fonksiyonunu (31) bağıntısıyla bulunuz.

$-\tau y'' = 0 \Rightarrow y''=0 \Rightarrow r^2=0 \Rightarrow r_{1,2}=0$

$$y=\begin{cases} Ax+B & 0\leq x<T \\ Cx+D & T<x\leq L \end{cases}$$

$y(0)=0 \Rightarrow A.0+B=0 \quad B=0 \Rightarrow y=Ax \qquad A=1, \quad C=-1$

$y(L)=0 \Rightarrow CL+D=0 \quad D=-CL \Rightarrow y=-C(L-x)$

$u(x)=x \qquad v(x)=(L-x) \qquad u'=1 \quad v'=-1$

$J(u,v) = -\tau\left[x\cdot(-1) - (L-x)\right]$

$= \tau L$

$$g(x;T)=\frac{1}{\tau L}\left[x\cdot(L-T)\underbrace{H(T-x)}_{\begin{cases}1 & T>x\\ 0 & T<x\end{cases}}+T(L-x)H(x-T)\right]=\frac{1}{\tau L}\begin{cases}x(L-T) & 0\leq x\leq T\\ T(L-x) & T\leq x\leq L\end{cases}$$

Ör/ $y'' + 4y = F(x)$ $\alpha < x < \beta$

$y(\alpha) = m_1$

$y'(\beta) = m_2$

sınır değer probleminin Green fonksiyonunu bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} y'' + 4y = 0 \\ y(\alpha) = 0 \\ y'(\beta) = 0 \end{array}\right\}$$

$y'' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp 2i$

$y = A\cos 2x + B\sin 2x$

$$y = \begin{cases} A\cos 2x + B\sin 2x & \alpha < x < T \\ C\cos 2x + D\sin 2x & T < x < \beta \end{cases}$$

veya

$$y = \begin{cases} B_1 \sin 2(x+\theta) & \alpha < x < T \\ C_1 \cos 2(x+\theta) & T < x < \beta \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2B_1 \cos 2(x+\theta) & \alpha < x < T \\ -2C_1 \sin 2(x+\theta) & T < x < \beta \end{cases}$$

$y(\alpha) = 0$

$B_1 \sin 2(\alpha+\theta) = 0 \Rightarrow \sin 2(\alpha+\theta) = 0$

$\Rightarrow 2\alpha + 2\theta = 0$

$\theta = -\alpha$

$y'(\beta) = 0 \Rightarrow -2C_1 \sin 2(\beta+\theta) = 0$

$2(\beta+\theta) = 0$

$\theta = -\beta$

$$y = \begin{cases} B_1 \sin 2(x-\alpha) & \alpha \le x < T \\ C_1 \cos 2(x-\beta) & T < x \le \beta \end{cases}$$

$B_1 = C_1 = 1$ alırsak; $u(x) = \sin 2(x-\alpha)$ $\quad u(\alpha) = 0$ $\quad u' = 2\cos 2(x-\alpha)$

$v(x) = \cos 2(x-\beta)$ $\quad v'(\beta) = 0$ $\quad v' = -2\sin 2(x-\beta)$

$$J(u,v) = 1.\left[\sin 2(x-\alpha).(-2).\sin 2(x-\beta) - \cos 2(x-\beta).\ 2\cos 2(x-\alpha)\right]$$

$$= -2\left[\sin 2(x-\alpha)\sin 2(x-\beta) + \cos 2(x-\alpha)\cos 2(x-\beta)\right]$$

$$= -2\cos\left[2x - 2\alpha - 2x + 2\beta\right]$$

$$= -2\cos 2(\beta-\alpha)$$

$$g(x;T) = \frac{1}{J(u,v)}\left[u(x)v(T)H(T-x) + u(T)v(x)H(x-T)\right]$$

$$= \frac{-1}{2\cos 2(\beta-\alpha)}\left[\sin 2(x-\alpha).\cos 2(T-\beta)\ H(T-x) + \sin 2(T-\alpha)\cos 2(x-\beta)\ H(x-T)\right]$$

Teorem 4

$g(x;T)$,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=F(x) \qquad \alpha < x < \beta \\ &B_1 y=0 \\ &B_2 y=0 \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonu olmak üzere (32) probleminin çözümü

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta} g(x;T)F(T)\,dT \qquad (33)$$

$$Lg=\delta(x-T) \qquad L: \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+q$$

$$B_1 g=0$$

$$B_2 g=0$$

dir.

İspat:

$$Ly=F(x)$$

$$Ly=L\left[\int_{\alpha}^{\beta} g(x;T)F(T)\,dT\right]$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} Lg(x;T)\,F(T)\,dT=\int_{\alpha}^{\beta}\delta(x-T)F(T)\,dT$$

$$x=T \qquad dx=dT \qquad =\int_{\alpha}^{\beta}\delta(T-x)F(x)\,dx=F(x)$$

$g(x;T)F(T)\,dT$ x-ekseninin dT aralığı üzerindeki $F(x)$ kaynağının $F(T)\,dT$ kısmına uygulanan etkidir. $F(x)$ kaynağı aralık üzerinde dağıldığında; kaynak x_j noktalarındaki F_j büyüklüklerinin n tanesi ile oluşturulmak üzere $F(x)$ kaynağı ile toplanarak (32) probleminin çözümü

$$y(x)=\int_\alpha^\beta g(x;T)\Big[F(T)+\sum_{j=1}^{n}F_j\,\delta(T-x_j)\Big]dT$$

$$=\int_\alpha^\beta g(x;T)\,F(T)\,dT+\sum_{j=1}^{n}F_j\,g(x;x_j)\qquad(34)$$

Teorem 5 :

L operatörü (32) probleminin diferansiyel op. olmak üzere $v(x;T)$, $Lv(x;T)=\delta(x-T)$ denklemini sağlıyorsa yani bu denklemin bir çözümü ise ve $u(x)$'de ikinci türevi parçalı sürekli olan bir fonk. ise

$$\int_\alpha^\beta (uLv-vLu)\,dx=\Big[p(x)\cdot(uv'-vu')\Big]_\alpha^\beta\qquad(35)$$

Teorem 6 :

L operatörü (32) probleminin dif. op. olsun. u ve v. $Lu=\delta(x-T)$ $Lv=\delta(x-S)$ olduğunda

$$\int_{\alpha}^{\beta} (uLv - vLu)\, dx = \left\{ p(x) \left[uv' - vu' \right] \right\}_{\alpha}^{\beta} \qquad (36)$$

Teorem 7.

Sınır şartları karışık olsun ya da olmasın (32) problemi için Green fonksiyonu simetriktir.

$$g(x;\tau) = g(\tau, x) \qquad (37)$$