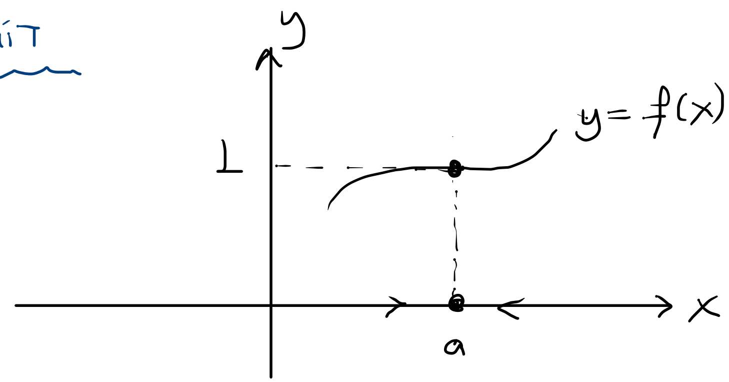
LİMİT ve SÜREKLİLİK

LİMİT



x bağımsız değişkeni, a sbt olmak üzere a'dan farklı ve a sayısına istenildiği kadar yakın değerler alıyorsa (Başka bir deyişle x ile a arasındaki fark x değiştiğinde istenildiği kadar küçük pozitif bir sayıdan daha küçük kalıyorsa yani $|x-a|<\delta$ $(\delta>0)$ oluyorsa) ve buna karşılık f(x)'nde a noktası yakınındaki her x için tanımlı olmak üzere (a'da tanımlı olmayabilir) L gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x a'ya yaklaşırken f(x) de L limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$ şeklinde gösterilir.

Ör/ 1. $\lim_{x \to a} x = a$

2- $\lim_{x \to a} c = c$

* Fonksiyonun (f(x)) x=a noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı olması ve grafiğinin herhangi bir kırılma (kopma) olmadan (a, f(a)) noktasından geçmesi halinde

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

dır.

* Eğer f(x) fonksiyonu x=a da tanımlı değilse o zaman uygun cebirsel işlemler yapılarak limit hesaplanabilir.

* f(x) fonksiyonu x=a'da tanımlı olmadığı gibi limiti de olmayabilir.

$y = \frac{1}{\sin x}$ $x = \pi$'de tanımsız.

$\lim_{x \to \pi} \frac{1}{\sin x} \to \infty$ limit mevcut değil.

Örnekler.

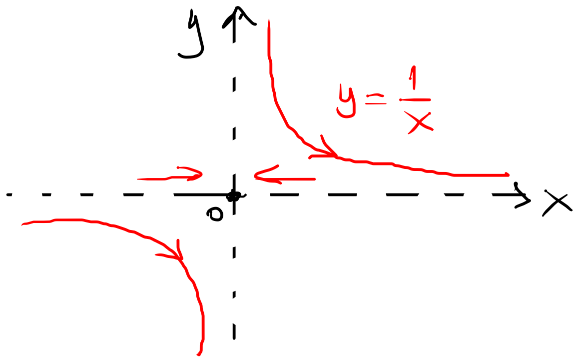
1) $\lim\limits_{\underset{x+2}{x\to -2}} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x-1)}{(x+3)} = \dfrac{-3}{1} = -3$

2) $\lim\limits_{\underset{x-a}{x\to a}} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\overset{-\cancel{(x-a)}}{\overbrace{a-x}}}{\cancel{(x-a)}\cdot a\cdot x} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-1}{a\cdot x} = \dfrac{-1}{a^2}$

3) $\lim\limits_{\underset{x-4}{x\to 4}} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{32}$

NOT: Bir f(x) fonksiyonu x=a noktasının her iki yanında tanımlı olmasına karşın bu noktada limite sahip olmayabilir.

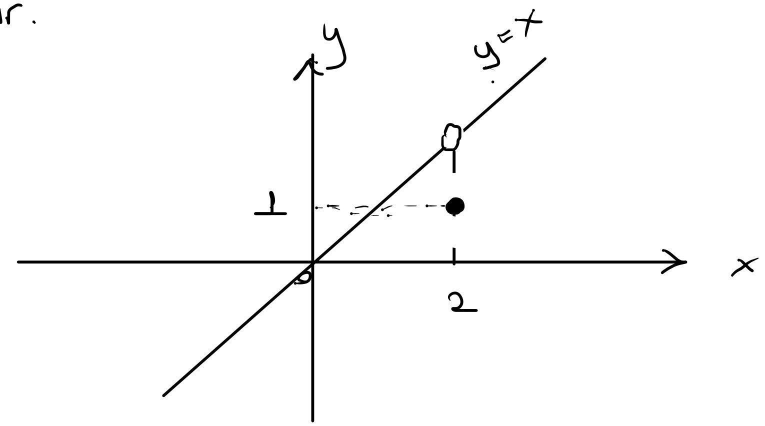
$y = \frac{1}{x}$ $D(f): \mathbb{R} - \{0\}$



$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ → mutlak değerce $\frac{1}{x}$ büyür.
Belli bir L değeri söz konusu değildir.

NOT: Bir f(x) fonksiyonu x=a noktasında tanımlı olabilir ancak x a'ya yaklaşırken limit değeri f(a)'ya eşit olmayabilir.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 1$

Sağ- Sol Limitler (Kenar limitler)

Sol limit : f(x) fonksiyonu a'nın solundaki bir (b,a) aralığında tanımlı ve x'i a'nın solundan a'ya yeterince yakın alarak, f(x)'in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak f(x) x=a'da sol limite sahiptir deriz.

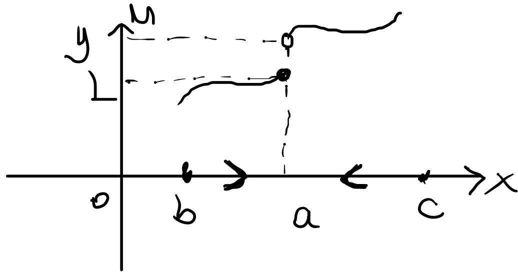
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

Sağ limit : f(x) fonksiyonu a'nın sağındaki bir (a,c) aralığında tanımlı ve x'i a'nın sağından a'ya yeterince yakın alarak f(x)'in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak f(x) x=a'da sağ limite sahiptir deriz.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

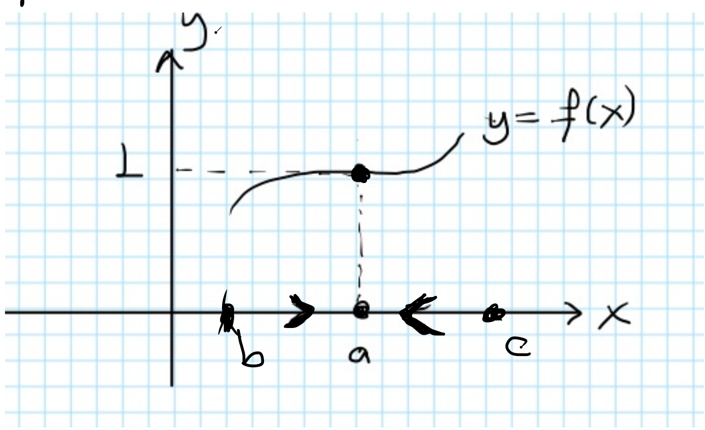
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = M$$

Ör/ $\operatorname{sgn}(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ \text{Tanımsız} & x = 0 \end{cases}$ $x \to 0$ sağ ve sol limitini bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) &= -1 \\ \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) &= 1 \end{aligned}\right\} \neq$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$



Ör/ $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ $x=2$'de sağ ve sol limitlerini bulalım.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x^2+x-6} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x+3} = \frac{-1}{5}$$

$$\neq$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x^2+x-6} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

TEOREM: Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir $x=a$ noktasında L limitine sahip olması için gerek ve yeter koşul $x=a$ noktasında sağ ve sol limitlerinin mevcut ve birbirine eşit olmasıdır.

Buna göre verilen son örnekte $sgn(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $x=0$'da, ve $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ fonksiyonu $x=2$'de limite sahip değildir.

Limit kuralları

Eğer $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=M$ ve k bir sabit ise;

1°) Limit varsa tektir.

2°) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\mp g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\mp\lim_{x\to a} g(x)=L\mp M$

3°) $\lim_{x\to a} [k.f(x)] = k.\lim_{x\to a} f(x) = k.L$

4°) $\lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)].[\lim_{x\to a} g(x)] = L.M$

5°) $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{[\lim_{x\to a} f(x)]}{[\lim_{x\to a} g(x)]} = \frac{L}{M}$ $\quad$ ($\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ olması koşuluyla)

6°) $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer n çift iken $L>0$ ise ve $m<0$ iken $L \neq 0$ ise

$\lim_{x\to a} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$ 'dir. $\quad \sqrt[n]{[f(x)]^m}$ $\quad m<0 \Rightarrow \frac{1}{[f(x)]^{m/n}}$

7°) Eğer a noktasını içeren bir aralık üzerinde (a noktası aralığın herhangi bir uç noktası olmayacak) $f(x) \leq g(x)$ ise

$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow L \leq M$ 'dir.

• 8°) (Sandviç teoremi) a noktasını içeren bir açık aralıktaki tüm x'ler için $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ($x=a$'da olmayabilir) olduğunu kabul edelim. Ve $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ olsun.

O zaman $\lim_{x \to a} g(x) = L$'dir.

- Verilen tüm kurallar sağ - sol limitler için de geçerlidir.
- Limit kuralları belirsizlik söz konusu olmadığında geçerlidir.

Ör/ $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ ise $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\lim_{x \to a} -|f(x)| = 0 = \lim_{x \to a} |f(x)| \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0$$