Kritik Noktaların Sınıflandırılması

Komplike fonksiyonlar için iç kritik noktaları sınıflandırmak zordur. Böyle fonksiyonlar için sınıflandırma h ve k nın küçük değerlerinde $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ farkı gözönüne alınarak yapılabilir. (a,b) noktası fonksiyonun kritik noktasıdır. Eğer bu fark pozitif ise fonksiyon yerel minimum değere, negatif ise yerel maksimum değere sahiptir denir. Fark $(0,0)$ noktasının keyfi civarındaki bazı (h,k) noktaları için negatif değerleri için pozitif ise o zaman fonksiyonun (a,b) noktasında bir eyer noktasına sahip olduğunu söyleriz.

Ör/ $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$D(f): \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0$$

$+$

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x-1) = 0$$

$x = 0$, $y = 0$ $x = 1$, $y = 1$

$A(0,0)$ ve $B(1,1)$ noktaları kritik noktalardır.

$$A(0,0): \Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0)$$
$$= 2h^3 - 6hk + 3k^2 - 0$$
$$= 2h^3 - 6hk + 3k^2$$

$(h,0) \rightarrow$ $\Delta f = 2h^3$; $h > 0 \Rightarrow \Delta f > 0$; $h < 0 \Rightarrow \Delta f < 0$

h'ın farklı değerleri için Δf'in işareti değiştiğinden $(0,0)$ noktası eyer noktasıdır.

$B(1,1)$: $\Delta f = f(1+h, 1+k) - f(1,1)$

$$= 2(1+h)^3 - 6(1+h)(1+k) + 3(1+k)^2 - (-1)$$

$$= 2(1+3h+3h^2+h^3) - 6(1+k+h+hk) + 3(1+2k+k^2) + 1$$

$$= \cancel{2} + \cancel{6h} + 6h^2 + 2h^3 - \cancel{6} - \cancel{6k} - \cancel{6h} - 6hk + \cancel{3} + \cancel{6k} + 3k^2 + \cancel{1}$$

$$= 2h^3 + 6h^2 - 6hk + 3k^2$$

$$= 2h^3 + 3h^2 + 3h^2 - 6hk + 3k^2$$

$$= h^2[2h+3] + 3[h^2 - 2hk + k^2]$$

$$= \underbrace{h^2}_{>0}\underbrace{[2h+3]}_{>0\ (|h|<\frac{3}{2})} + 3\underbrace{[h-k]^2}_{>0}$$

$\Delta f > 0$ olduğundan fonksiyon $(1,1)$ noktasında bir yerel minimum değere sahiptir.

İki Değişkenli Fonksiyonlar için İkinci Türev Testi

Fonksiyonun tanım kümesinin bir iç noktası olan (a,b) noktasının bir kritik nokta olduğunu kabul edelim. Ayrıca fonksiyonun 2. mertebeden kısmi türevlerinin (a,b) noktasının komşuluğunda sürekli olduğunu ve de

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} = A \,, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(a,b)} = B \,, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)} = C$$

değerlerine sahip olduğunu kabul edelim.

Eğer;

1°) $B^2 - AC > 0$ ise f için (a,b) noktası bir eyer noktasıdır.

2°) $B^2 - AC < 0$ ise f için (a,b) noktası bir ekstremum noktadır

a) $A > 0$ olduğunda $f(a,b)$ minimum değerdir

b) $A < 0$ olduğunda $f(a,b)$ maksimum değerdir.

3°) $B^2 - AC = 0$ ise ikinci türev testi cevap vermez. Fonksiyon (a,b)'de maksimum veya minimum değere ya da eyer noktasına sahip olabilir.

ÖRNEKLER

1) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0$$

$+$

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x-1) = 0$$

$x = 0 \Downarrow y = 0$, $x = 1 \Downarrow y = 1$

$M(0,0)$, $N(1,1)$ kritik noktalar.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$$

$M(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 = C$$

$B^2 - AC = 36 - 0$

$= 36 > 0$

(0,0) Eyer Noktası

$N(1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 = C$$

$B^2 - AC = 36 - 72$

$= -36 < 0$

ve

$A = 12 > 0$

olduğundan

$f(1,1) = -1$

yerel minimum değerdir.

2) $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x^2 y e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$= \underbrace{y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \left[1 - x^2\right]}= 0 \to y = 0, \quad \to 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ 1) $M(0,0)$

$x = 1 \Rightarrow y = \mp 1$ 2) $\to N(1,1)$, $\to P(1,-1)$

$x = -1 \Rightarrow y = \pm 1$ 3) $\to O(-1,1)$, $\to R(-1,-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x y^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$= x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \left[1 - y^2\right] = 0 \to x = 0, \quad \to 1 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \mp 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1-x^2) - 2xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = -xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 - x^2 + 2) = -xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (3 - x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1-x^2) - y^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1-x^2) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1-x^2)(1-y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1-y^2) - 2xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = -xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (3 - y^2)$$

$M(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 = C$$

$$B^2 - AC = 1 > 0$$

$(0,0)$ Eyer noktasıdır.

$N(1,1)$, $R(-1,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2}{e} = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2}{e} = C$$

$$B^2 - AC = 0 - \left(\frac{-2}{e}\right)\left(\frac{-2}{e}\right)$$

$$= \frac{-4}{e^2} < 0$$

$$A = \frac{-2}{e} < 0$$

$f(1,1)$ ve $f(-1,-1)$ yerel maksimum değerlerdir.

$P(1,-1)$, $O(-1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{e} = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{e} = C$$

$$B^2 - AC = 0 - \left(\frac{2}{e}\right)\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$= -\frac{4}{e^2} < 0$$

$$A = \frac{2}{e} > 0$$

$f(1,-1)$ ve $f(-1,1)$ değerleri yerel minimum değerlerdir.

Ör/ $f(x,y) = 1 - x^4 - y^4 - 4x^2y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 - 8xy^2 = 0 \Rightarrow -4x\,(\underbrace{x^2+2y^2}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 - 8x^2y = 0 \Rightarrow -4y\,(\underbrace{y^2+2x^2}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$(0,0)$ kritik nokta.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2 - 8y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 - 8x^2$$

$(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 = C$$

$B^2 - AC = 0$ 2. türev testi cevap vermez.

$$\Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = \cancel{1} - h^4 - k^4 - 4h^2k^2 - \cancel{1} = -(\underbrace{h^4 + k^4 + 4h^2k^2}_{>0}) < 0$$

$\Delta f < 0$ olduğundan $(0,0)$ noktası max. noktadır ve max. değer $f(0,0) = 1$'dir.