Lineer Hale Getirilebilen Dif. Denklemler

1°) Bernoulli Dif. Denklemi

$P(x)$ ve $Q(x)$ sürekli fonksiyonlar, $n \neq 0$, $n \neq 1$ olmak üzere

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

şeklindeki denklemlere Bernoulli dif. denklemi denir.

$n = 0 \Rightarrow \quad y' + P(x)\,y = Q(x) \rightarrow$ Lineer dif. denk.

$n = 1 \Rightarrow \quad y' + P(x)\,y = Q(x)\,y \Rightarrow \quad y' + [P(x) - Q(x)]\,y = 0 \rightarrow$ Değişkenlerine Ayrılabilir dif. denk.

Her terimi y^n'e bölerek denklemi yeniden düzenleyelim;

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x)$$

Bu denklemi Lineer hale dönüştürmek için $P(x)$'in katsayısı olan $\frac{1}{y^{n-1}}$'e z dönüşümü yapılır.

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} \Rightarrow \quad z = y^{-n+1} \Rightarrow \quad z' = (-n+1)\cdot y^{-n}\cdot y' = (-n+1)\cdot \frac{y'}{y^n} \Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{-n+1}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{z'}{-n+1} + P(x)\,z = Q(x) \Rightarrow \quad z' + (-n+1)\,P(x)\,z = (-n+1)\cdot Q(x) \rightarrow$ Lineer dif. denk.

Lineer dif. denk.'in çözümü

$$z=\phi(x,c_1)$$

şeklinde olacaktır. Bernoulli dif. denkleminin çözümü ise $y^{-n+1}=\phi(x,c_1)$ olacaktır.

Ör/ $y'+y=xy^3$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$P(x)=1$ $\quad Q(x)=x$ olan Bernoulli dif. denk.

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^3}+\frac{1}{y^2}=x$$

$$\left.\frac{1}{y^2}=z \Rightarrow -2\frac{y'}{y^3}=z' \Rightarrow \frac{z'}{-2}=\frac{y'}{y^3}\right\} \Rightarrow -\frac{z'}{2}+z=x \Rightarrow z'-2z=-2x$$ Lineer dif. denk.

$P(x)=-2 \qquad q(x)=-2x \qquad \lambda=e^{\int p(x)dx}=e^{-2\int dx}=e^{-2x}$

$$\frac{dz}{dx}-2z=-2x \Rightarrow dz-2z\,dx=-2x\,dx$$

$$\underbrace{e^{-2x}dz-2ze^{-2x}dx}=-2xe^{-2x}dx$$

$$\int d(e^{-2x}\cdot z)=\int -2xe^{-2x}dx$$

$$z\cdot e^{-2x}=-2\int xe^{-2x}dx$$

$$z \cdot e^{-2x} = -2\int x e^{-2x}\,dx \Rightarrow z \cdot e^{-2x} = -2\left[-\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\right] + C$$

$x = u$

$dx = du$

$e^{-2x}dx = dV$

$-\frac{1}{2}e^{-2x} = V$

$$z \cdot e^{-2x} = xe^{-2x} - \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C$$

$$z = x + \frac{1}{2} + C \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + C \cdot e^{2x} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{2x+1+2Ce^{2x}}{2}$$

$$y^2 = \frac{2}{2x+1+2ce^{2x}} \Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{2}{2x+1+2ce^{2x}}}$$

Ör/ $y' + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^3}$ dif. denk.'nin genel çözümünü bulunuz.

Bernoulli dif. denk.

$$\Rightarrow y^3 y' + \frac{y^4}{x} = x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} y^4 = z \Rightarrow 4y^3y' = z' \\ \Rightarrow y^3y' = \frac{z'}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{z'}{4} + \frac{z}{x} = x^2 \Rightarrow z' + \frac{4z}{x} = 4x^2$$ Lineer dif. denk.

$$z' + \frac{4z}{x} = 4x^2$$

$$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\ln x} = x^4$$

$$dz + \frac{4z}{x}dx = 4x^2 dx$$

$$\underbrace{x^4 dz + 4x^3 z\, dx} = 4x^6 dx$$

$$\int d(z.x^4) = \int 4x^6 dx$$

$$z.x^4 = \frac{4}{7}x^7 + c$$

$$z = \frac{4}{7}x^3 + cx^{-4}$$

$$y^4 = \frac{4}{7}x^3 + \frac{c}{x^4}$$

$\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$

$x\,dx = dv \Rightarrow \frac{x^2}{2} = v$

Ör/ $y' - \frac{y}{3x} = y^4 \ln x$ dif. denk'nin genel çözümünü bulunuz.

Bernoulli dif.

$$\frac{y'}{y^4} - \frac{1}{3xy^3} = \ln x$$

$$\frac{1}{y^3} = z \Rightarrow \frac{-3y'}{y^4} = z' \Rightarrow \frac{y'}{y^4} = -\frac{z'}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-z'}{3} - \frac{z}{3x} = \ln x \Rightarrow z' + \frac{z}{x} = -3\ln x \quad \text{L.D.D.}$$

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lambda = e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \lambda = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

$$dz + \frac{z}{x}dx = -3\ln x\, dx$$

$$\underbrace{x\,dz + z\,dx} = -3x\ln x\, dx$$

$$\int d(x.z) = \int -3x \ln x\, dx$$

$$x.z = -3\int x \ln x\, dx + C$$

$$x.z = -3\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}\right] + C$$

$$x \cdot z = -3\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}\right] + C$$

$$\Rightarrow x \cdot z = -\frac{3x^2}{2}\ln x + \frac{3x^2}{4} + C$$

$$\Rightarrow z = -\frac{3x}{2}\ln x + \frac{3x}{4} + \frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^3} = -\frac{3x}{2}\ln x + \frac{3x}{4} + \frac{C}{x}$$

2°) Ricatti dif. denklemi

$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ şeklindeki diferansiyel denklemlerdir.

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü ancak ve ancak bir özel çözümü bilindiği takdirde bulunur.

Denklemin bir özel çözümü y_1 olsun.

Denklemi çözebilmek için $u = u(x)$ hesaplanması gereken bir fonksiyon olmak üzere

1°) $y = y_1 + u$ dönüşümü uygulanırsa denklem Bernoulli dif. denklemine dönüşür.

$$y' = y_1' + u'$$

$$\Rightarrow y_1' + u' = P(x)(y_1+u)^2 + Q(x)(y_1+u) + R(x)$$

$$\Rightarrow y_1' + u' = P(x)(y_1^2 + 2y_1u + u^2) + Q(x)y_1 + Q(x)u + R(x)$$

$$\cancel{y_1'} + u' = \underbrace{\cancel{P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)}}_{y_1'} + 2P(x)y_1u + u^2P(x) + Q(x)u \Rightarrow \underbrace{u' + \left[-2P(x)y_1 + Q(x)\right]u = u^2P(x)}_{\text{Bernoulli dif. denk.}}$$

2°) $y = y_1 + \frac{1}{u}$ dönüşümü ile ise denklem Lineer dif. denkleme dönüşecektir.

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$$

$$\Rightarrow y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x).\left[y_1 + \frac{1}{u}\right]^2 + Q(x)\left[y_1 + \frac{1}{u}\right] + R(x)$$

$$\Rightarrow y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x)\left[y_1^2 + 2\frac{y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right] + Q(x)y_1 + \frac{Q(x)}{u} + R(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{y_1'} - \frac{u'}{u^2} = \underbrace{\cancel{P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)}}_{y_1'} + \frac{2P(x)y_1}{u} + \frac{P(x)}{u^2} + \frac{Q(x)}{u}$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{[2P(x)y_1 + Q(x)]}{u} + \frac{P(x)}{u^2} \Rightarrow u' = -[2P(x)y_1 + Q(x)]u - P(x)$$

$$\Rightarrow u' + \underbrace{[2P(x)y_1 + Q(x)]}_{p(x)}u = \underbrace{-P(x)}_{q(x)}$$

$u' + p(x)u = q(x)$ Lineer dif. denk.

Lineer dif. denk. genel çöz. ← $\boxed{u = \phi(x,c)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = y_1 + \frac{1}{\phi(x,c)}}$ → Ricatti dif. denk. genel çöz.

Ör/ $y' - \frac{y}{x} + 9x^2 = y^2$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = 3x$ olarak verildiğine göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

$y_1 = 3x \Rightarrow y_1' = 3 \Rightarrow \cancel{3} - \frac{\cancel{3x}}{\cancel{x}} + 9x^2 = 9x^2$ ✓ denklemi sağlar.

$$y' = y^2 + \frac{y}{x} - 9x^2 \quad \text{Ricatti dif. denk.}$$

$y = y_1 + \frac{1}{u} = 3x + \frac{1}{u}$ dönüşümü yapılır.

$$y' = 3 - \frac{u'}{u^2}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{u'}{u^2} = \left(3x + \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(3x + \frac{1}{u}\right) - 9x^2$$

$$\Rightarrow \cancel{3} - \frac{u'}{u^2} = \cancel{9x^2} + \frac{6x}{u} + \frac{1}{u^2} + \cancel{3} + \frac{1}{ux} - \cancel{9x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{6x}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{ux}$$

$$\Rightarrow u' = -6xu - 1 - \frac{u}{x}$$

$$u' = -u\left(6x + \frac{1}{x}\right) - 1$$

$$\Rightarrow u' + \left(6x + \frac{1}{x}\right)u = -1 \quad \text{L.D.D.}$$

$$p(x) = 6x + \frac{1}{x} \Rightarrow \lambda = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \left(6x + \frac{1}{x}\right)dx} = e^{(3x^2 + \ln x)} = x e^{3x^2}$$

$$\frac{du}{dx} + \left(6x + \frac{1}{x}\right)u = -1$$

$$du + \left(6x + \frac{1}{x}\right)u\,dx = -dx$$

$$xe^{3x^2}du + xe^{3x^2}\left(6x + \frac{1}{x}\right)u\,dx = xe^{3x^2}dx$$

$$\underbrace{xe^{3x^2}du + e^{3x^2}(6x^2 + 1)u\,dx}_{} = xe^{3x^2}dx$$

$$\int d\left(x e^{3x^2} u\right) = \int x e^{3x^2} dx$$

$\int d\left(x e^{3x^2} u\right) = \frac{1}{6}\int 6x\, e^{3x^2} dx$

$3x^2 = t$
$6x\,dx = dt$

$x e^{3x^2} u = \frac{1}{6}\int e^t dt + c$

$x e^{3x^2} u = \frac{1}{6} e^{3x^2} + c$

$$\boxed{u = \frac{1}{6x} + \frac{c}{x e^{3x^2}}}$$

Lineer dif. denk. genel çöz.

$$\boxed{y = y_1 + \frac{1}{u} = 3x + \frac{1}{\frac{1}{6x} + \frac{c}{x e^{3x^2}}}}$$

Ricatti dif. denk. genel çöz.

Ör/ $y' + y^2 - 1 = 0$ dif denklemi ve bu denklemin bir özel çözümü $y_1 = 1$ olarak veriliyor. Denklemin genel çözümünü bulunuz.

$y' = -y^2 + 1$ Ricatti dif. denk.

$y_1 = 1 \Rightarrow y_1' = 0 \Rightarrow 0 = -1 + 1$ ✓

$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{u}$, $y' = \frac{-u'}{u^2}$

$-\frac{u'}{u^2} = -\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 + 1 \Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = -\left(1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right) + 1$

$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2}{u} - \frac{1}{u^2} \Rightarrow u' = 2u + 1$

$\Rightarrow u' - 2u = 1$ L.D.D.

$u' - 2u = 1$ L.D.D.

$p(x) = -2 \Rightarrow \lambda = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$

$du - 2u\,dx = dx$

$$\underbrace{e^{-2x}du - 2u\,e^{-2x}dx} = e^{-2x}dx$$

$$\int d(e^{-2x}.u) = \int e^{-2x}\,dx$$

$$u.e^{-2x} = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

$$u = -\frac{1}{2} + c.e^{2x}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{2x}}$$

$$\boxed{y = \frac{\frac{1}{2} + ce^{2x}}{-\frac{1}{2} + ce^{2x}}}$$

G.Ç.

Ör/ $y' + y^2 - 3y\tan x + \tan^2 x - 1 = 0$ dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \tan x$ olarak verildiğine göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

$y_1 = \tan x \Rightarrow y_1' = 1 + \tan^2 x$

$$\cancel{1} + \tan^2 x + \tan^2 x - 3\tan^2 x + \tan^2 x - \cancel{1} = 0$$

$$0 = 0 \checkmark$$

$y' = -y^2 + 3y\tan x + 1 - \tan^2 x$ Ricatti dif. denk.

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = \tan x + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x - \frac{u'}{u^2}$$

$$1 + \tan^2 x - \frac{u'}{u^2} = -\left(\tan x + \frac{1}{u}\right)^2 + 3\tan x\left(\tan x + \frac{1}{u}\right) + 1 - \tan^2 x$$

$$1 + \tan^2 x - \frac{u'}{u^2} = -\left[\tan^2 x + \frac{2\tan x}{u} + \frac{1}{u^2}\right] + 3\tan^2 x + \frac{3\tan x}{u} + 1 - \tan^2 x$$

$$\cancel{1} + \cancel{\tan^2 x} - \frac{u'}{u^2} = -\cancel{\tan^2 x} - \frac{2\tan x}{u} - \frac{1}{u^2} + \cancel{3\tan^2 x} + \frac{3\tan x}{u} + \cancel{1} - \cancel{\tan^2 x}$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{\tan x}{u} - \frac{1}{u^2}$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{\tan x}{u} - \frac{1}{u^2} \Rightarrow u' = -u\tan x + 1 \Rightarrow u' + \tan x \cdot u = 1 \quad \text{L.D.D.}$$

$$p(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \tan x \, dx} = e^{-\ln \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$du + u \cdot \tan x \, dx = dx$$

$$\underbrace{\frac{du}{\cos x} + u \cdot \frac{\tan x}{\cos x} dx}_{} = \frac{dx}{\cos x}$$

$$\int d\left(\frac{1}{\cos x} \cdot u\right) = \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\frac{u}{\cos x} = \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$u = \cos x \cdot \ln(\sec x + \tan x) + C \cdot \cos x \Rightarrow y = y_1 + \frac{1}{u}$$

Lineer dif. denk genel çöz.

$$\boxed{y = \tan x + \frac{1}{\cos x \ln(\sec x + \tan x) + C \cdot \cos x}}$$

Ricatti dif. denk. genel çözümü.