Değişken değiştirme yöntemi (Yerine koyma yöntemi)

Daha önceki örneklerde olduğu gibi integral, integrand hangi fonksiyonun türevidir sorusuna cevap vermiyorsa o zaman integralin değerini başka yöntemlerle bulmak gerekir. Bunlardan en önemlisi zincir kuralının integral versiyonu olan değişken değiştirme yöntemidir.

$$\frac{d}{dx}\{f[g(x)]\} = f'[g(x)].\, g'(x)$$

$$\int \underbrace{f'[g(x)].\, g'(x)\,dx} = f[g(x)] + c$$

$$\int f'[\underbrace{g(x)}_{u}]\, g'(x)\, dx$$

$$= \int f'(u).\, du = f(u) + c = f[g(x)] + c$$

$g(x) = u$

$g'(x)\,dx = du$

Ör $\displaystyle \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$x^2+1 = u$

$2x\,dx = du$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

Ör $\displaystyle \int \frac{\sin(3\ln x)}{x}\,dx = \int \sin(3u)\,du$

$\ln x = u$

$\frac{1}{x}\,dx = du$

$= -\frac{1}{3}\cos(3u) + c$

$= -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + c$

3) $\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (1+e^x)^{3/2} + c$

$1+e^x = u$

$e^x\, dx = du$

4) $\int \frac{1}{\underbrace{x^2+4x}+5}\, dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\, dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c = \arctan(x+2) + c$

$x+2 = u$

$dx = du$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}(1-e^{-2x})}} = \int \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u + c$

$= \arccos(e^{-x}) + c$

$e^{-x} = u$

$-e^{-x}\, dx = du$

$e^{-x}\, dx = -du$

Belirli integralde değişken değiştirme

Teorem : g'nin $[a,b]$'de türevlenebilir bir fonksiyon ve $g(a)=A$, $g(b)=B$ eşitliklerini sağladığını kabul edelim. Ayrıca f'in g'nin değer bölgesi üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\int_a^b f[g(x)]\cdot g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$$

dur.

Ör/

$$\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^3 \cos u\cdot(2\,du)$$

$$= 2\sin u\Big|_1^3$$

$$= 2[\sin 3 - \sin 1]$$

$\sqrt{x+1} = u$

$\dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}} = du$

$\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\,du$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=8 \Rightarrow u=3$

$$= \int_A^B \cos u\cdot(2\,du)$$

$$= 2\sin u\Big|_A^B$$

$$= 2\sin\sqrt{x+1}\Big|_0^8$$

$$= 2\sin 3 - 2\sin 1$$

Ör/ $y=\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2\cos\frac{x}{2}$ fonksiyonu, x-ekseni ve $x=0$ $x=\pi$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

$x\in[0,\pi]$ için $y\geq 0$

$$A=\int_0^\pi \left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2\cos\frac{x}{2}\,dx = \int_2^3 u^2\cdot 2\,du$$

$2+\sin\frac{x}{2}=u$

$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx=du$

$\cos\frac{x}{2}\,dx=2\,du$

$x=0 \Rightarrow u=2$

$x=\pi \Rightarrow u=3$

$$=2\,\frac{u^3}{3}\Big|_2^3$$

$$=\frac{2}{3}[27-8]=\frac{38}{3}\,br^2$$

TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

- $\int \sin(ax)\,dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a}(-\cos u) + c = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$

$ax = u$

$a\,dx = du$

$dx = \frac{du}{a}$

$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$

- $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \underbrace{\int -\frac{du}{u}}_{} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$

$\int \cot x = \ln|\sin x| + c$

$\cos x = u$

$-\sin x\,dx = du$

$\sin x\,dx = -du$

$\int \tan(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)| + c$

- $\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

$\sec x + \tan x = u$

$(\sec \cdot \tan x + \sec^2 x)\,dx = du$

$$\int \csc x\,dx = \int \frac{\csc x\,(\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)}\,dx = \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|\csc x + \cot x| + c$$

$\csc x + \cot x = u$

$(-\csc x \cdot \cot x - \csc^2 x)\,dx = du$

$(\csc x \cdot \cot x + \csc^2 x)\,dx = -du$

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$ şeklindeki integraller

Eğer m veya n pozitif bir tek sayı ise ;

m tek ise $\rightarrow$ $\cos x = u$ dönüşümü yapılır ve $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden yararlanılarak integral çözülür.

n tek ise $\rightarrow$ $\sin x = u$ dönüşümü yapılır ve yine $\sin^2 x + \cos^2 x$ özdeşliğinden yararlanılarak integral çözülür.

m ve n çift ise $\rightarrow$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ tam açı formüllerinden yararlanılarak integral çözülür.

Örnekler

1) $\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^8 x \cdot \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x) \cdot \cos^8 x \cdot \sin x \, dx$

$\cos x = u$

$-\sin x \, dx = du$

$\sin x \, dx = -du$

$= \int (1-u^2) \cdot u^8 \cdot (-du)$

$= \int (u^{10} - u^8) du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^9}{9} + C$

$= \frac{(\cos x)^{11}}{11} - \frac{(\cos x)^9}{9} + C$

2) $\int \cos^5 (ax) \, dx = \int \cos^4 (ax) \cdot \cos(ax) \, dx = \int [1-\sin^2(ax)]^2 \cdot \cos(ax) \, dx$

$\sin(ax) = u$

$a \cos(ax) dx = du$

$\cos(ax) dx = \frac{du}{a}$

$= \int (1-u^2)^2 \cdot \frac{du}{a}$

$= \frac{1}{a} \int (1 - 2u^2 + u^4) du$

$= \frac{1}{a} \left[u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{u^5}{5} \right] + C$

$= \frac{1}{a} \left[\sin(ax) - \frac{2}{3} \sin^3(ax) + \frac{1}{5} \sin^5(ax) \right] + C$

3) $\int \sin^2 x \, dx = \int \left[\frac{1-\cos 2x}{2} \right] dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int \sec^m x . \tan^n x \, dx$ veya $\int \csc^m x . \cot^n x \, dx$ şeklindeki integraller

m tek ve n çift olmadıkça bu integraller hesaplanabilir.
(kısmi int.)

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$
} özdeşlikleri ve $\sec x = u$, $\tan x = u$; $\csc x = u$, $\cot x = u$ } dönüşümlerinden biri kullanılarak integral hesaplanır.

Ör/ $\int \tan^2 x \, dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1) \, dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx = \tan x - x + C$

Ör/ $\int \sec^3 x . \tan^3 x \, dx = \int \sec x . \sec^2 x . \tan^2 x . \tan x \, dx = \int \sec^2 x (\sec^2 x - 1) \sec x . \tan x \, dx$

$\sec x = u$
$\sec x . \tan x \, dx = du$

$= \int u^2 (u^2 - 1) \, du = \int (u^4 - u^2) \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$

$= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C$

$$\int \sec^2 x \cdot \tan^3 x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\tan^4 x}{4} + c$$

$\tan x = u$

$\sec^2 x \, dx = du$

$$\int \sec^4 x \tan^3 x \, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \tan^3 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \cdot \tan^3 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int (1 + u^2) \cdot u^3 \, du$$

$\tan x = u$

$\sec^2 x \, dx = du$