$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = ?$$

Teğetler ve Alanlar

Eğer f ve g fonksiyonları bir t noktasında türevlenebilir ise $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ fonksiyonları da t noktasında türevlenebilirler. x ve y parametrik eğriyi gösteriyorsa bu türevlenebilir eğri üzerindeki bir noktada y'de x'in türevlenebilir fonksiyonu olduğunda $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}$ türevleri arasındaki ilişki zincir kuralı ile verilir.

- $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dt}{dt} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

- $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{dy/dt}{dx/dt}\right]\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1}{dx/dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$=\frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

Ör/ $\left.\begin{matrix} x=\sec t \\ y=\tan t\end{matrix}\right\}$ $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ parametrizasyonuyla verilen eğrinin $(\sqrt{2},1)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\left.\begin{matrix} x=\sec t \longrightarrow \dot{x}=\sec t\cdot\tan t \\ y=\tan t \longrightarrow \dot{y}=\sec^2 t\end{matrix}\right\} \quad y'=\frac{\sec^{\cancel{2}} t}{\cancel{\sec t}\cdot\tan t}=\frac{1}{\sin t}$$

$$\left.\begin{matrix} x=\sqrt{2} \Rightarrow \sec t=\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ y=1 \Rightarrow \tan t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow y'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{array}\right\} \Rightarrow y'' = ?$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = 1 - 2t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -2$$

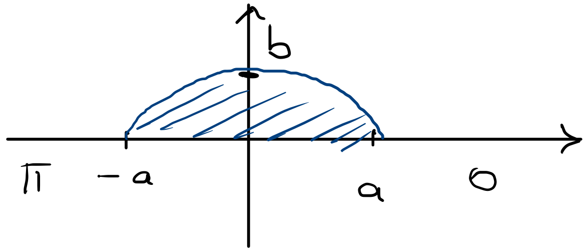
$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = 1 - 3t^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = -6t$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3} = \frac{(-6t)\cdot(1-2t) - (-2)\cdot(1-3t^2)}{(1-2t)^3}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-6t + 12t^2 + 2 - 6t^2}{(1-2t)^3} = \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^3}$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right\}$ $0 \le t \le \pi$ şeklinde parametrize edilen eğrinin altında kalan alanı bulunuz.

$$A = \int_a^b \underbrace{f(x)}_{=y}\, dx$$



$x = a\cos t \Rightarrow dx = -a\sin t\, dt$

$y = b\sin t$

$$A = \int_\pi^0 b\sin t \cdot (-a\sin t)\, dt$$

$$= ab \int_0^\pi \sin^2 t\, dt$$

$$= ab \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \frac{ab}{2}\left[\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi}\right]$$

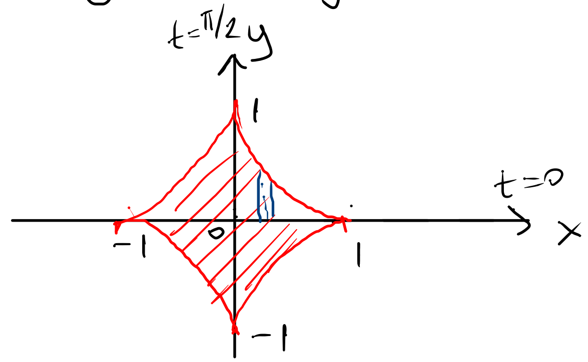
$$= \frac{ab}{2}\left[(\pi - 0) - \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0)\right]$$

0

$$= \frac{ab\pi}{2} \ \text{br}^2$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{array}\right\}$ $0 \le t \le 2\pi$ şeklinde parametrize edilen astroid eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

$y = \sin^3 t \qquad dx = -3\cos^2 t . \sin t \, dt$



$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \to$ astroid

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_{\pi/2}^{0} \sin^3 t . (-3\cos^2 t)\sin t \, dt = 3\int_0^{\pi/2} \cos^2 t . \sin^4 t \, dt$$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos 2t)}{2} \cdot \frac{(1-\cos 2t)^2}{4}$$

$(0,1) \to (1,0)$

$x = 0 \Rightarrow \cos^3 t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$y = 1 \Rightarrow \sin^3 t = 1 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{t_1 = \frac{\pi}{2}}$

$(1,0)$

$x = 1 \Rightarrow \cos^3 t = 1 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, 2\pi$

$y = 0 \Rightarrow \sin^3 t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi$

$\Big\} \ t_2 = 0$

$$= \frac{3\pi}{8} \ \text{br}^2$$

Parametrik olarak tanımlı eğrinin uzunluğu

Eğer c eğrisi $x=f(t)$, $y=g(t)$ $a\leq t\leq b$ parametrizasyonu ile tanımlanıyorsa, f' ve g' fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve aynı zamanda sıfır olmayan fonksiyonlar olmak üzere t, a'dan b'ye artarken c eğrisi üzerinden bir kez geçiliyorsa bu durumda c eğrisinin uzunluğu

$$S=\int_A^B \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Ör/ $\left.\begin{matrix} x=r\cos t \\ y=r\sin t\end{matrix}\right\}$ $0\leq t\leq 2\pi$ parametrizasyonu ile verilen r yarıçaplı çemberin uzunluğunu bulunuz.

$$\left.\begin{matrix} \frac{dx}{dt}=\dot{x}=-r\sin t \\ \frac{dy}{dt}=\dot{y}=r\cos t\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt=rt\Big|_0^{2\pi}=2\pi r$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{array}\right\}$ $0\le t\le 2\pi$ astroid eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$\left.\begin{array}{l} \dot{x}=-3\cos^2 t\sin t \\ \dot{y}=3\sin^2 t\cos t \end{array}\right\}$

$$s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}3\sin t\cos t\,dt$$

$$=12\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt$$

$$=12\int_0^{1}u\,du=12\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_0^1=6\text{ br}$$

$\sin t=u$

$\cos t\,dt=du$

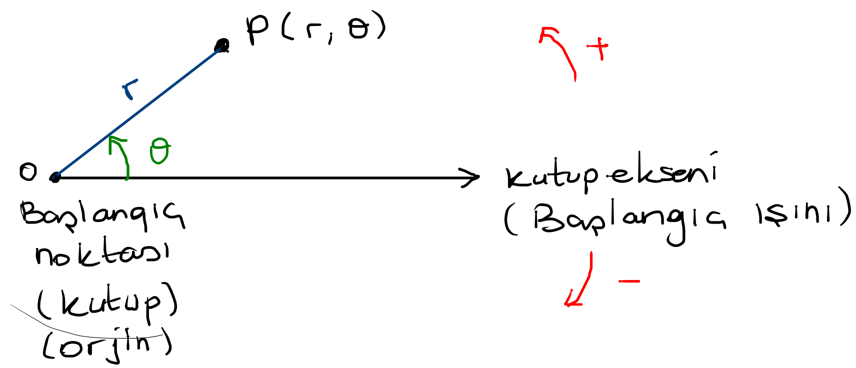
$t=0\Rightarrow\sin 0=u$

$u=0$

$t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2}=u$

$u=1$

KUTUPSAL KOORDİNATLAR



$r = f(\theta)$

θ'nın pozitif yönü saat yönünün ters yönüdür.
θ'nın negatif yönü ise saat yönüdür.

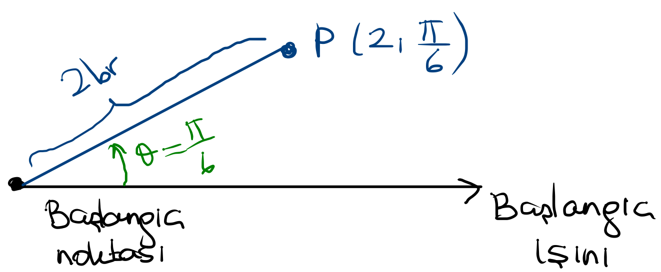
r'nin negatif değeri, θ'nın hareketli kolu üzerinde ters yönde alınmış olan uzaklıktır.

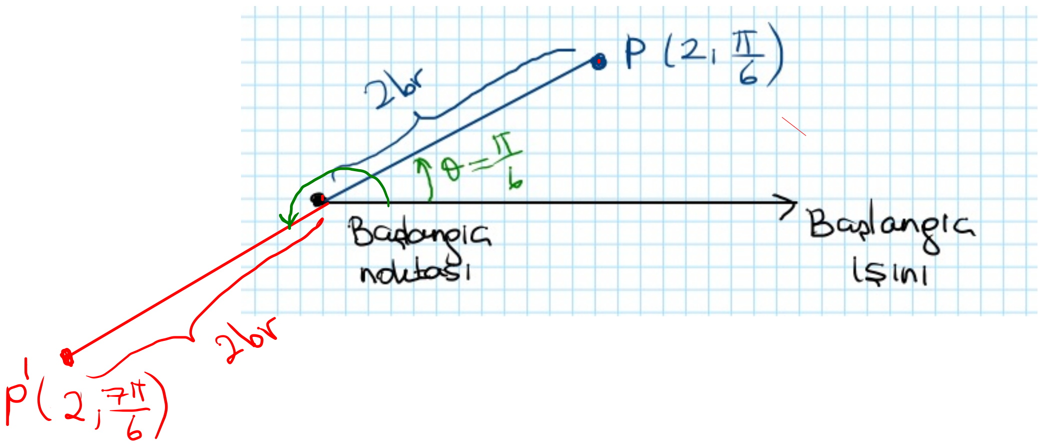
Kutupsal koordinatları tanımlamak için bir başlangıç noktası (kutup veya orjin) ve bir başlangıç ışınını (kutup ekseni) sabitleriz.

Kutupsal koordinatlar bir P noktasını bir çemberle merkezinden çıkan bir ışının kesişmesi olarak belirtir.

Verilen bir nokta ile ilgili açı bir tane değildir. Düzlemdeki bir noktanın sadece bir çift kartezyen koordinatı olmasına karşın sonsuz miktarda kutupsal koordinat çifti vardır.

$P(2, \frac{\pi}{6})$





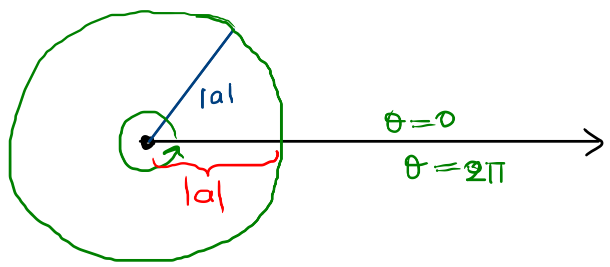
$$P\left(2,\frac{\pi}{6}\right) = P\left(2, \frac{\pi}{6} \mp 2k\pi\right) = P'\left(-2, \frac{7\pi}{6} \mp 2k\pi\right)$$

$$P'\left(2,\frac{7\pi}{6}\right) = P'\left(2, \frac{7\pi}{6} \mp 2k\pi\right) = P\left(-2, \frac{\pi}{6} \mp 2k\pi\right)$$

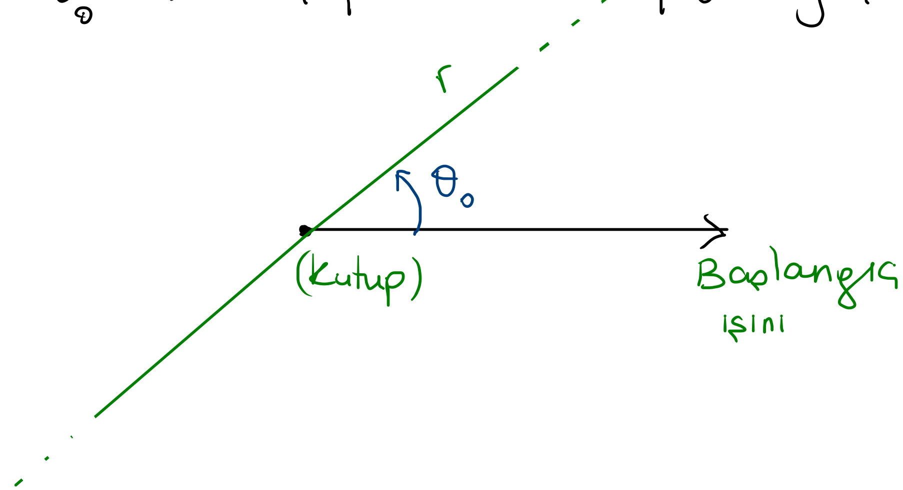
Kutupsal Denklemler ve Grafikleri

- Eğer r değerini $r = a \neq 0$ sabit olarak seçersek $P(r,\theta)$ noktası kutuptan $|a|$ birim uzaktadır. θ açısı uzunluğu 2π olan herhangi bir aralıkta değişiyorsa P noktası merkezi kutupta ve yarıçapı $|a|$ olan çemberdir.

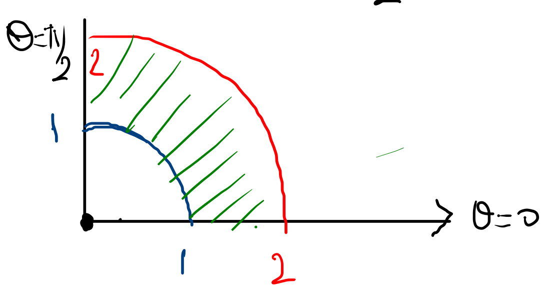
$$r = a \,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \Rightarrow$$



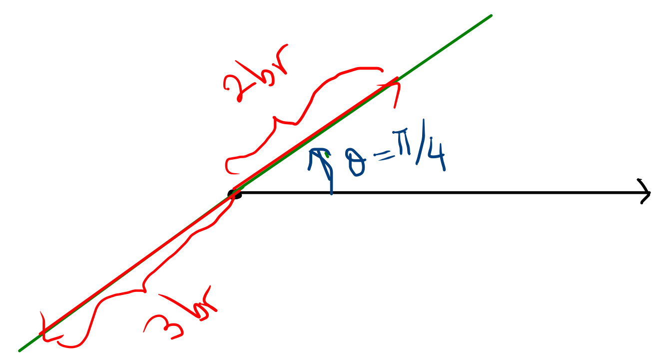
- Eğer θ açısını $\theta = \theta_0$ ve r'yi $-\infty < r < \infty$ olarak alırsak $P(r,\theta)$ noktası başlangıç ışını ile θ_0 açısı yapan ve kutuptan geçen doğruyu verir.



- $1 \leq r \leq 2 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



- $-3 \leq r < 2 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$



- $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \quad -\infty < r < \infty$