



MAT1320-Linear Cebir Ders Notları

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı, Germe Kavramı

Mehmet E. KÖROĞLU

Güz 2020

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ, MATEMATİK BÖLÜMÜ
mkoroglu@yildiz.edu.tr

Table of contents

1. Bir Vektör Kümesinin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı
2. Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)
3. Germe Kavramı

Bir Vektör Kümesinin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ skalerleri varsa $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörlerine **lineer bağımlı vektörler**

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ skalerleri varsa $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörlerine **lineer bağımlı vektörler**

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ skalerleri varsa $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörlerine **lineer bağımlı vektörler**

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ skalerleri varsa $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörlerine **lineer bağımsız vektörler** denir.

Example

$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ vektörleri lineer bağımsızdır. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = (0, 0, 0)$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ vektörleri lineer bağımsızdır. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ vektörleri lineer bağımsızdır. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ vektörleri lineer bağımsızdır. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ vektörleri lineer bağımsızdır. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$

olduğundan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2, 0), \vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 0, 1), \vec{\mathbf{v}}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz.

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2, 0), \vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 0, 1), \vec{\mathbf{v}}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + x_3 \vec{\mathbf{v}}_3 = (0, 0, 0)$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2, 0), \vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 0, 1), \vec{\mathbf{v}}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + x_3 \vec{\mathbf{v}}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = r \text{ için } x_1 = x_2 = -r$$

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Example

$$\{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = r \text{ için } x_1 = x_2 = -r$$

şeklinde sıfırdan farklı çözüm olduğundan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vektörleri

lineer bağımlıdır.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

ise $\vec{w}$ vektörüne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörlerinin **lineer birleşimi ya da lineer terkibi** denir.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Definition

V bir reel vektör uzayı, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ olsun.

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

ise $\vec{w}$ vektörüne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörlerinin **lineer birleşimi ya da lineer terkibi** denir. Burada $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörlerinin lineer birleşimi yine V vektör uzayının bir elemanıdır.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(9, 2, 7) = x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2)$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(9, 2, 7) = x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(9, 2, 7) = x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(9, 2, 7) = x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(9, 2, 7) = x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(9, 2, 7) = x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2$$

sistemin tek çözümü olup $(9, 2, 7) = -3(1, 2, -1) + 2(6, 4, 2)$ yazılır.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w}' = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\begin{aligned}\vec{w}' &= x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ (4, -1, 8) &= x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2)\end{aligned}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\vec{w}' = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(4, -1, 8) = x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\begin{aligned}\vec{w}' &= x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ (4, -1, 8) &= x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2) \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{array} \right. &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\begin{aligned}\vec{w}' &= x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ (4, -1, 8) &= x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2) \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{array} \right. &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\begin{aligned}\vec{w}' &= x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ (4, -1, 8) &= x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2) \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{array} \right. &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow 0 = 1\end{aligned}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (9, 2, 7)$ vektörünün $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (6, 4, 2)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini fakat $\vec{w}' = (4, -1, 8)$ vektörünün ise yazılamadığını gösteriniz.

$$\begin{aligned}\vec{w}' &= x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ (4, -1, 8) &= x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2) \\ \begin{cases} x_1 + 6x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow 0 = 1\end{aligned}$$

çelişkisi elde edileceğinden sistem tutarsızdır. Yani $\vec{w}'$ vektörü $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılamaz.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, -2, k)$ vektörü hangi k değerleri için $\vec{u} = (3, 0, -2)$ ve $\vec{v} = (2, -1, 5)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir.

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, -2, k)$ vektörü hangi k değerleri için $\vec{u} = (3, 0, -2)$ ve $\vec{v} = (2, -1, 5)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, -2, k)$ vektörü hangi k değerleri için $\vec{u} = (3, 0, -2)$ ve $\vec{v} = (2, -1, 5)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}\vec{w} &= x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ (1, -2, k) &= x_1 (3, 0, -2) + x_2 (2, -1, 5)\end{aligned}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, -2, k)$ vektörü hangi k değerleri için $\vec{u} = (3, 0, -2)$ ve $\vec{v} = (2, -1, 5)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(1, -2, k) = x_1 (3, 0, -2) + x_2 (2, -1, 5)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = -2 \\ -2x_1 + 5x_2 = k \end{cases}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, -2, k)$ vektörü hangi k değerleri için $\vec{u} = (3, 0, -2)$ ve $\vec{v} = (2, -1, 5)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}\vec{w} &= x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ (1, -2, k) &= x_1 (3, 0, -2) + x_2 (2, -1, 5) \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = -2 \\ -2x_1 + 5x_2 = k \end{array} \right. &\Rightarrow x_2 = 2, x_1 = -1\end{aligned}$$

Vektörlerin Lineer Birleşimi (Lineer Terkibi)

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, -2, k)$ vektörü hangi k değerleri için $\vec{u} = (3, 0, -2)$ ve $\vec{v} = (2, -1, 5)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$

$$(1, -2, k) = x_1 (3, 0, -2) + x_2 (2, -1, 5)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = -2 \\ -2x_1 + 5x_2 = k \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2, x_1 = -1$$
$$\Rightarrow k = -2(-1) + 5 \cdot 2 = 12.$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Theorem

V vektör uzayında $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ m -tane lineer bağımsız vektör olsun. Eğer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ vektörleri lineer bağımlı ise $\vec{v}_{m+1}$ vektörü $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ vektörlerinin lineer terkibi olarak yazılabilir.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Theorem

V vektör uzayında $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ m -tane lineer bağımsız vektör olsun. Eğer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ vektörleri lineer bağımlı ise $\vec{v}_{m+1}$ vektörü $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ vektörlerinin lineer terkibi olarak yazılabilir.

Theorem

V vektör uzayında $r < m$ olmak üzere $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ vektörlerinden r tanesi lineer bağımlı ise $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ vektörleri de lineer bağımlı olur.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Theorem

V vektör uzayında $m < n$ olmak üzere; $\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,

$\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\vec{v}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Theorem

V vektör uzayında $m < n$ olmak üzere; $\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,

$\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\vec{v}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ olsun. Eğer } \text{rank}(A) = r \text{ ise verilen}$$

m vektörden r -tanesi lineer bağımsızdır.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Theorem

V vektör uzayında $m < n$ olmak üzere; $\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,

$\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\vec{v}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ olsun. Eğer } \text{rank}(A) = r \text{ ise verilen}$$

m vektörden r -tanesi lineer bağımsızdır.

1. $r < m$ ise geriye kalan $m - r$ vektörden her biri bu r vektörün lineer terkibi olarak yazılabilir.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Theorem

V vektör uzayında $m < n$ olmak üzere; $\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,

$\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\vec{v}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ olsun. Eğer } \text{rank}(A) = r \text{ ise verilen}$$

m vektörden r -tanesi lineer bağımsızdır.

1. $r < m$ ise geriye kalan $m - r$ vektörden her biri bu r vektörün lineer terkibi olarak yazılabilir.
2. $n = m$ ise verilen m vektörün lineer bağımsız olabilmesi için $|A| \neq 0$ olmalıdır.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Theorem

V vektör uzayında $m < n$ olmak üzere; $\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,
 $\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\vec{v}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ olsun. Eğer } \text{rank}(A) = r \text{ ise verilen}$$

m vektörden r -tanesi lineer bağımsızdır.

1. $r < m$ ise geriye kalan $m - r$ vektörden her biri bu r vektörün lineer terkibi olarak yazılabilir.
2. $n = m$ ise verilen m vektörün lineer bağımsız olabilmesi için $|A| \neq 0$ olmalıdır.
3. Eğer $n < m$ ise verilen m -tane vektör lineer bağımlıdır.

Example

$\mathbb{R}^4$ uzayında $\vec{a} = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, -1, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, 2, 1)$ ve $\vec{d} = (-2, 1, 0, 0)$ vektörleri verilsin.

Example

$\mathbb{R}^4$ uzayında $\vec{a} = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, -1, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, 2, 1)$ ve $\vec{d} = (-2, 1, 0, 0)$ vektörleri verilsin.

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektörleri lineer bağımsız olur mu?

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Example

$\mathbb{R}^4$ uzayında $\vec{a} = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, -1, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, 2, 1)$ ve $\vec{d} = (-2, 1, 0, 0)$ vektörleri verilsin.

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektörleri lineer bağımsız olur mu?
2. $\vec{u} = (1, -1, 2, 1)$ vektörünün $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektörlerinin lineer toplamı olarak yazınız.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (1)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (0, 0, 0, 0)$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (1)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 & = 0 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 & = 0 \\ & 2c_2 & +2c_3 & & = 0 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & & = 0 \end{array}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (1)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrcr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 & = 0 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 & = 0 \\ & 2c_2 & +2c_3 & & = 0 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & & = 0 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (1)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 = 0 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 = 0 \\ & 2c_2 & +2c_3 & = 0 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & = 0 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (1)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrcr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 = 0 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 = 0 \\ & 2c_2 & +2c_3 & = 0 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & = 0 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (1)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrcr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 = 0 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 = 0 \\ & 2c_2 & +2c_3 & = 0 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & = 0 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

tek çözümdür. O halde $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ lineer bağımsızdır.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (2)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (1, -1, 2, 1)$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (2)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (1, -1, 2, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 & = 1 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 & = -1 \\ & 2c_2 & +2c_3 & & = 2 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & & = 1 \end{array}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (2)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (1, -1, 2, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 & = 1 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 & = -1 \\ & 2c_2 & +2c_3 & & = 2 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & & = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow [A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (2)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (1, -1, 2, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrrr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 & = 1 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 & = -1 \\ & 2c_2 & +2c_3 & & = 2 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & & = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow [A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{6}{7}, c_3 = \frac{1}{7}, c_4 = -\frac{3}{7}$$

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

Solution (2)

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} + c_3 \vec{c} + c_4 \vec{d} = (1, -1, 2, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrrr} c_1 & & +c_3 & -2c_4 & = 1 \\ & -c_2 & +2c_3 & +c_4 & = -1 \\ & 2c_2 & +2c_3 & & = 2 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & & = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow [A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{6}{7}, c_3 = \frac{1}{7}, c_4 = -\frac{3}{7}$$

$$\text{olup } \frac{6}{7} \vec{b} + \frac{1}{7} \vec{c} - \frac{3}{7} \vec{d} = (1, -1, 2, 1) \text{ dir.}$$

Germe Kavramı

Definition

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\} \subset V$ kümesi verilsin. S 'nin gerdiği küme veya S tarafından gerilen küme $\text{span}(S)$ veya $\langle S \rangle$ ile gösterilir ve S 'nin elemanlarının mümkün bütün lineer kombinasyonlarının kümesidir.

Definition

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\} \subset V$ kümesi verilsin. S 'nin gerdiği küme veya S tarafından gerilen küme $\text{span}(S)$ veya $\langle S \rangle$ ile gösterilir ve S 'nin elemanlarının mümkün bütün lineer kombinasyonlarının kümesidir. Yani,

$$\text{span}(S) = \{k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_r \vec{v}_r \mid k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}$$

dir.

Definition

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\} \subset V$ kümesi verilsin. S 'nin gerdiği küme veya S tarafından gerilen küme $\text{span}(S)$ veya $\langle S \rangle$ ile gösterilir ve S 'nin elemanlarının mümkün bütün lineer kombinasyonlarının kümesidir. Yani,

$$\text{span}(S) = \{k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_r \vec{v}_r \mid k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}$$

dir.

Not: $\text{span}(S)$ kümesi V vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Definition

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\} \subset V$ kümesi verilsin. S 'nin gerdiği küme veya S tarafından gerilen küme $\text{span}(S)$ veya $\langle S \rangle$ ile gösterilir ve S 'nin elemanlarının mümkün bütün lineer kombinasyonlarının kümesidir. Yani,

$$\text{span}(S) = \{k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_r \vec{v}_r \mid k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}$$

dir.

Not: $\text{span}(S)$ kümesi V vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{u} = (1, -2, 1)$ vektörü tarafından gerilen küme

Definition

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\} \subset V$ kümesi verilsin. S 'nin gerdiği küme veya S tarafından gerilen küme $\text{span}(S)$ veya $\langle S \rangle$ ile gösterilir ve S 'nin elemanlarının mümkün bütün lineer kombinasyonlarının kümesidir. Yani,

$$\text{span}(S) = \{k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_r \vec{v}_r \mid k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}$$

dir.

Not: $\text{span}(S)$ kümesi V vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{u} = (1, -2, 1)$ vektörü tarafından gerilen küme

$$\text{span}(\{(1, -2, 1)\}) = \{k(1, -2, 1) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

Example

$\mathbb{R}^4$ uzayında $\vec{u} = (1, -2, 1, 3)$ vektörü ile $\vec{v} = (0, 2, -1, 0)$ vektörü tarafından gerilen küme

Example

$\mathbb{R}^4$ uzayında $\vec{u} = (1, -2, 1, 3)$ vektörü ile $\vec{v} = (0, 2, -1, 0)$ vektörü tarafından gerilen küme

$$\text{span}(\{(1, -2, 1, 3), (0, 2, -1, 0)\})$$

$$= \{a(1, -2, 1, 3) + b(0, 2, -1, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

?