PARAMETRİK DENKLEMLER VE KUTUPSAL KOORDİNATLAR

Parametrik Denklemler

Eğrileri daha önce fonksiyon veya denklemlerin x ve y gibi iki değişkenli grafikleri olarak inceledik. Şimdi bir eğriyi her iki koordinatı üçüncü bir t değişkeninin fonksiyonu olarak ifade eden yeni bir yöntemle ele alacağız.

Tanım: Eğer x ve y koordinatları t değişkeninin I aralığında $x=f(t)$ $y=g(t)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonları iseler o zaman bu denklemlerle tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. $x=f(t)$, $y=g(t)$ denklemlerine eğri için parametrik denklemler denir. t değişkeni eğri için bir parametre ve tanım kümesi olan I'da parametre aralığıdır. Eğer parametre aralığı kapalı bir aralıksa $f(a), g(a)$ eğrinin başlangıç noktası $f(b), g(b)$ ise eğrinin bitim noktasıdır.

$I: a \le t \le b$

Bir eğrinin parametrik denklemleri ve bir parametre aralığı verilmişse eğri parametrize edilmiştir denir.

$$\boxed{\begin{matrix} x=f(t) \\ y=g(t) \end{matrix}, \quad a \le t \le b} \rightarrow \text{Eğrinin bir parametrizasyonu}$$

Ör: Çemberi parametrize edelim. $(x^2+y^2=1)$

1) $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$

2) $x=t$, $y=\sqrt{1-t^2}$, $-1 \le t \le 1$

3) $x=\sin\theta$, $y=\cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$

4) $x=t-1$, $y=\sqrt{2t-t^2}$, $0 \le t \le 2$

ÖR ⇒ a ve b noktalarından geçen eğimi m olan doğruyu parametrize ediniz

$$y-b=m(x-a)$$

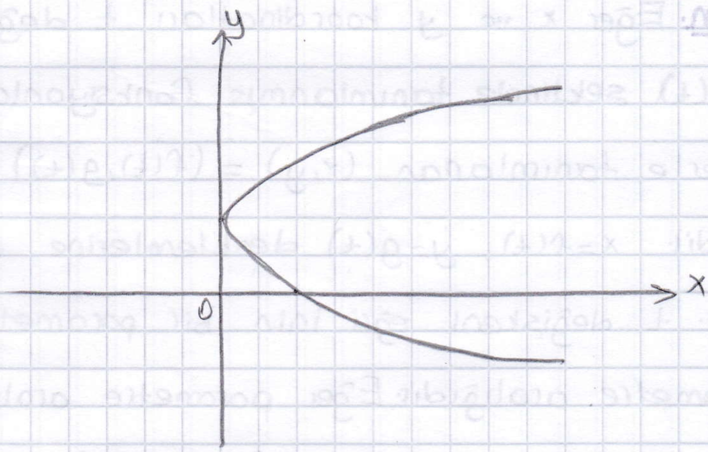
$$x-a=t$$

$$\left.\begin{array}{l} x=a+t \\ y=b+mt \end{array}\right\} -\infty < t < \infty$$

ÖR ⇒ Aşağıda parametrik denklemle ifade edilen eğrinin grafiğini çiziniz.

$$\left.\begin{array}{l} x=t^2 \\ y=t+1 \end{array}\right\} -\infty < t < \infty$$

$t=y-1 \Rightarrow x=(y-1)^2$



ÖR ⇒ $\left.\begin{array}{l} x=t+\frac{1}{t} \\ y=t-\frac{1}{t} \end{array}\right\}, t>0$ şeklinde parametrize edilen eğrinin ne olduğunu belirleyiniz (kartezyen denklemini bulunuz)

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2t \\ x-y=\frac{2}{t} \end{array}\right\} (x+y)(x-y)=2t\cdot\frac{2}{t}$$

$x^2-y^2=4$ ⟶ hiperbol denklemi

$$\left.\begin{array}{l} y=t \\ x=\sqrt{4+t^2} \end{array}\right\}, -\infty < t < \infty \qquad \left.\begin{array}{l} x=2\sec t \\ y=2\tan t \end{array}\right\} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Ör ⇒ $x+2y+4z=4$ düzlemi ve $x^2+4y^2=4$ eliptik silindirinin ara kesit eğrisini parametrize ediniz

$$x+2y+4z=x^2+4y^2$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{4}\left[x^2+4y^2-x-2y\right]$$

$x^2+4y^2=4 \Rightarrow$ Elips.

$$\left.\begin{aligned} x&=2\cos t \\ y&=\sin t \end{aligned}\right\} \Rightarrow z=\frac{1}{4}\left[4\cos^2 t+4\sin^2 t-2\cos t-2\sin t\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[4-2(\cos t+\sin t)\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$$

$$0\leq t\leq 2\pi$$

Teğetler ve Alanlar

Eğer f ve g fonksiyonları bir t noktasında türevlenebilir ise $x=f(t)$, $y=g(t)$ fonksiyonları da t noktasında türevlenebilirler. x ve y bir parametrik eğriyi gösteriyorsa bu türevlenebilir eğri üzerindeki bir noktada y de x'in türevlenebilir fonksiyonu olduğunda $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ ve $\frac{dy}{dx}$ türevleri arasındaki ilişki zincir kuralı ile verilir.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dt}{dt}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{dy/dt}{dx/dt}\right]\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

ÖR ⇒ $\left.\begin{array}{l} x=\sec t \\ y=\tan t \end{array}\right\} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ parametrik denklemleriyle verilen eğrinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktosındaki teğetinin eğimini bulunuz. (eğimi)

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\tan t\cdot\sec t} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{1}{\sin t}$$

$x=\sqrt{2} \Rightarrow \sec t = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\cos t} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Big\} \; t = \frac{\pi}{4}$$

$y=1 \Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$y'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

ör $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{array}\right\}$ $y'' = ?$

$\dfrac{dx}{dt} = 1 - 2t \qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2 \qquad y'' = \dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3}$

$\dfrac{dy}{dt} = 1 - 3t^2 \qquad \dfrac{d^2y}{dt} = -6t$

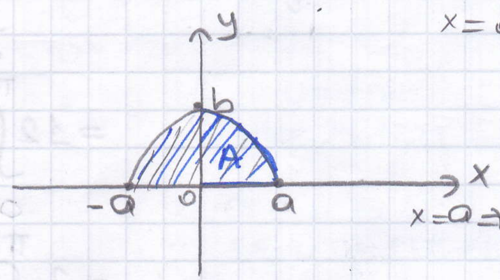
$$y'' = \frac{-6t(1-2t) - (-2).(1-3t^2)}{(1-2t)^3}$$

$$y'' = \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^3} \quad //$$

ör $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right\}$, $0 \leq t \leq \pi$ şeklinde parametrize edilen bölgenin alanını bulunuz.

$t = 0$	$t = \pi$	$t = \frac{\pi}{2}$
$x = a$ $y = 0$	$x = -a$ $y = 0$	$x = 0$ $y = b$



$x = 0 \Rightarrow a\cos t = 0$
$t = \pi/2$

$x = a \Rightarrow a\cos t = a$
$\cos t = 1$
$t = 0$

$$A = 2\int_0^a y\,dx$$

$$= 2\int_{\pi/2}^{0} b\sin t.(-a\sin t)\,dt$$

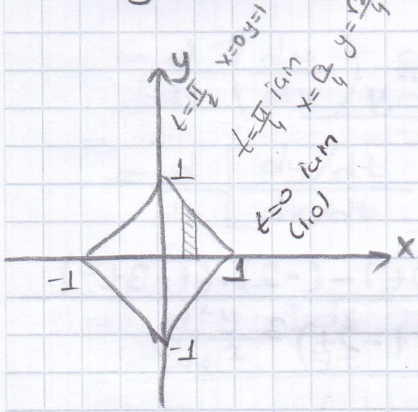
$$= 2ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt$$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = ab\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt$$

$$= ab\left(t\Big|_0^{\pi/2}\right) - \frac{ab}{2}\left(\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right)$$

$$= ab\frac{\pi}{2} - \frac{ab}{2}\left(\cancel{\sin\pi - \sin 0}\right) = ab\frac{\pi}{2}\ \text{br}^2 \quad //$$

ÖR ⇒ $\left.\begin{array}{l} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{array}\right\} 0\le t\le 2\pi$ şeklinde parametrize edilen astroid eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

$$A=4\int_0^1 y\,dx$$

$y=1$ $1=\sin^3 t \Rightarrow \sin t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$x=0 \Rightarrow 0=\cos^3 t \Rightarrow \cos t=0 \Rightarrow t=\pi/2$ $\Big\}\ t=\frac{\pi}{2}$

$x=1 \Rightarrow 1=\cos^3 t \Rightarrow \cos t=1 \Rightarrow t=0$

$y=0 \Rightarrow 0=\sin^3 t \Rightarrow \sin t=0 \Rightarrow t=0$ $\Big|\ t=0$

$$A=4\int_{\pi/2}^{0} \sin^3 t\cdot(-3)\cdot\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=12\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt$$

$$=12\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)^2(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{3\pi}{8}\ br^2$$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrinin Uzunluğu:

Eğer c eğrisi $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ ile $a\le t\le b$ aralığında parametrik olarak tanımlanıyorsa (f' ve g' $[a,b]$ aralığında sürekli ve aynı zamanda sıfır olmayan fonksiyonlardır) ve $t=a$'dan $t=b$'ye artarken c eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa bu durumda c eğrisinin uzunluğu;

$f'(t)\,dt$ $\quad x=f(t)$, $y=g(t)$ $\quad a\le t\le b$

$$S=\int_{a_1}^{b_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\,dx \qquad y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad dx=f'(t)\,dt$$

$$y'=\frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad =\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,\cancel{\frac{dt}{dx}}\cdot \cancel{dx}$$

$$x=a_1\to a \qquad =\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$y=b_1\to b$$

$$=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

ÖR ⟹ $\left.\begin{array}{l}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{array}\right\}$ $0\le t\le 2\pi$ parametrik denklemleri ile verilen r yarıçaplı çemberlerin uzunluğunu bulunuz.

$$\frac{dx}{dt}=-r\sin t \qquad \frac{dy}{dt}=r\cos t$$

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$=r\int_0^{2\pi}dt=rt\Big|_0^{2\pi}=\underline{r.2\pi}\text{ br}$$

ÖR ⟹ $\left.\begin{array}{l}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{array}\right\}$ $0\le t\le 2\pi$ şeklinde parametrize edilen astroid eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

$$S=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3\cos^2t\sin t)^2+(3\sin^2t\cos t)^2}\,dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^4t\sin^2t+9\sin^4t\cos^2t}\,dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\sin^2t\cos^2t(\cos^2t+\sin^2t)}\,dt$$

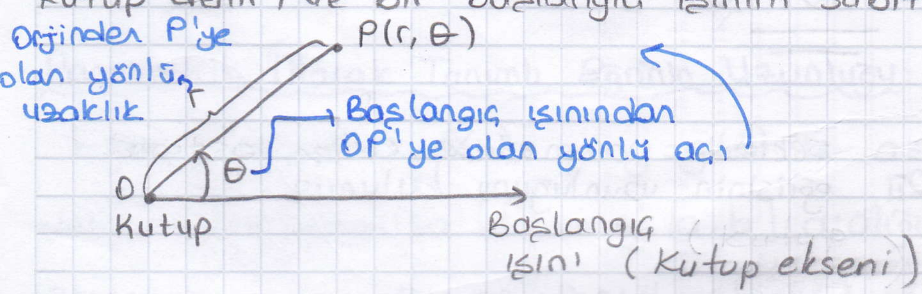
$$=4\int_0^{\pi/2}3\sin t\cos t\,dt=12\int_0^1 u\,du=12\left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1=\underline{\underline{6\text{ br}}}$$

$\sin t=u$
$\cos t\,dt=du$

$t=0\Rightarrow u=0$
$t=\pi/2\Rightarrow u=1$

Kutupsal Koordinatlar

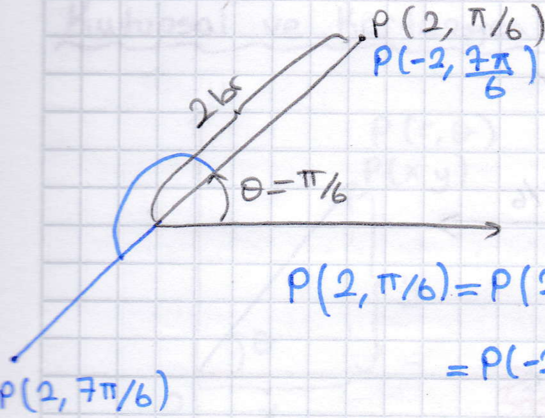
Kutupsal koordinatları tanımlamak için önce bir orjin (buna kutup denir) ve bir başlangıç ışınını sabitleriz.



pozitif θ → saatin ters yönünde
negatif θ → saat yönünde ölçülür.

Verilen bir nokta ile ilgili açı bir tane değildir. Düzlemdeki bir noktanın sadece bir çift kartezyen koordinatı olmasına karşın sonsuz miktarda kutupsal koordinat çifti vardır.

NOT: Kutupsal koordinatlar bir P noktasını bir çemberle merkezinden çıkan bir ışının kesişmesi olarak belirtir.



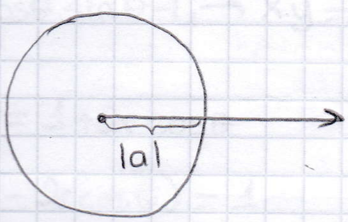
$$P(2, \pi/6) = P\left(2, \frac{\pi}{6} \mp 2k\pi\right)$$
$$= P\left(-2, \frac{7\pi}{6} \mp 2k\pi\right)$$

NOT r'nin negatif değeri θ'nın hareketli kolu üzerinde ters yönde alınmış uzaklıktır.

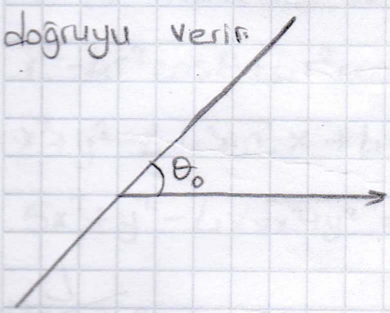
Eğer $r=0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.

Kutupsal Denklemler ve Grafikleri

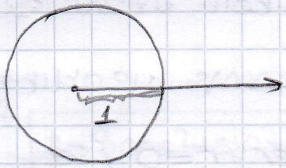
Eğer r değerini $r=a\neq 0$ şeklinde sabit olarak seçersek $P(r,\theta)$ noktası kutuptan $|a|$ birim uzaktadır. θ açısı uzunluğu 2π olan herhangi bir aralıkta değişiyorsa P noktası merkezi kutupta ve yarıçapı $|a|$ olan çemberi verir.



Eğer θ açısını $\theta=\theta_0$, $-\infty < r < \infty$ alırsak $P(r,\theta)$ noktası başlangıç ışını ile θ_0 ölçüsüne sahip açı yapan ve kutuptan geçen doğruyu verir.

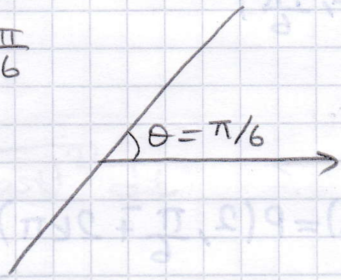


ör $\Rightarrow$ $r = 1$

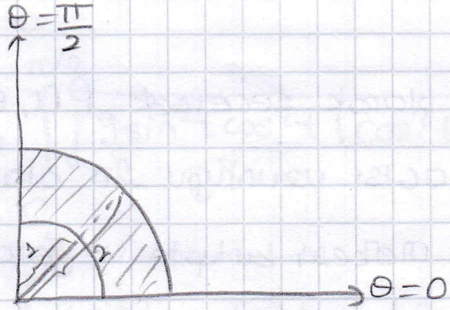


$\theta = \frac{\pi}{6}$

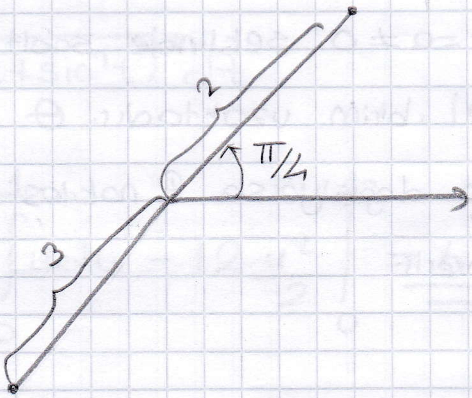
$\theta = 7\frac{\pi}{6}$



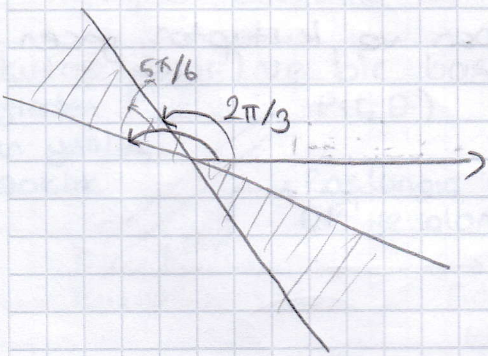
$1 \leq r \leq 2 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



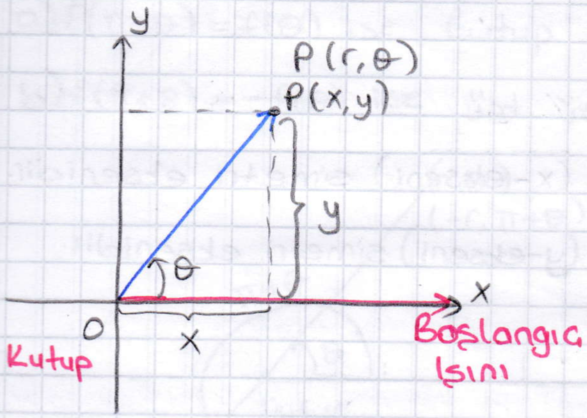
$-3 \leq r \leq 2 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$



$\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



Kutupsal ve Kartezyen Koordinatlar Arasındaki İlişki



$x = r\cos\theta$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\sin\theta$

$\theta = \arctan \frac{y}{x}$

√ $\boxed{r = \cos\theta = 2} \rightarrow x = 2$

√ $r^2\cos\theta \cdot \sin\theta = 4 \rightarrow x \cdot y = 4$

√ $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$

√ $x^2 - y^2 = 1$

√ $r = 1 + 2r\cos\theta$

$(r - 2r\cos\theta) = 1$

$r(1-\cos\theta) = 1$

$r^2(1-\cos\theta)^2 = 1$

$r^2(1 - 4\cos\theta + 4\cos^2\theta) = 1$

$r^2 - 4r^2\cos\theta + 4r^2\cos^2\theta = 1$

$x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2+y^2} \cdot x + 4x^2 = 1$

$5x^2 + y^2 - 4x\sqrt{x^2+y^2} = 1$

√ $x^2 + (y-3)^2 = 9$

$r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 3)^2 = 9$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 6r\sin\theta + \cancel{9} = \cancel{9}$

$r^2 - 6r\sin\theta = 0$

$r(r - 6\sin\theta) = 0$

$\cancel{r = 0}$ $\qquad \boxed{r = 6\sin\theta}$

ÖDEV

$r^2 = 4r\cos\theta$ $\qquad r = \frac{4}{2\cos\theta \cdot \sin\theta}$

Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi

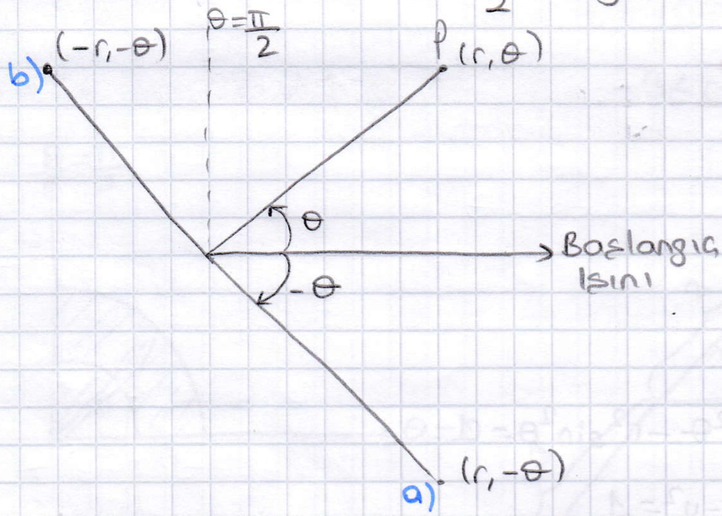
Simetri:

$$r = f(\theta)$$

1) $\theta \rightarrow -\theta$ yazalım.

a) $f(-\theta) = f(\theta)$ ise başlangıç ışını (x-ekseni) simetri eksenidir.

b) $f(-\theta) = -f(\theta)$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusu (y-ekseni) simetri eksenidir.



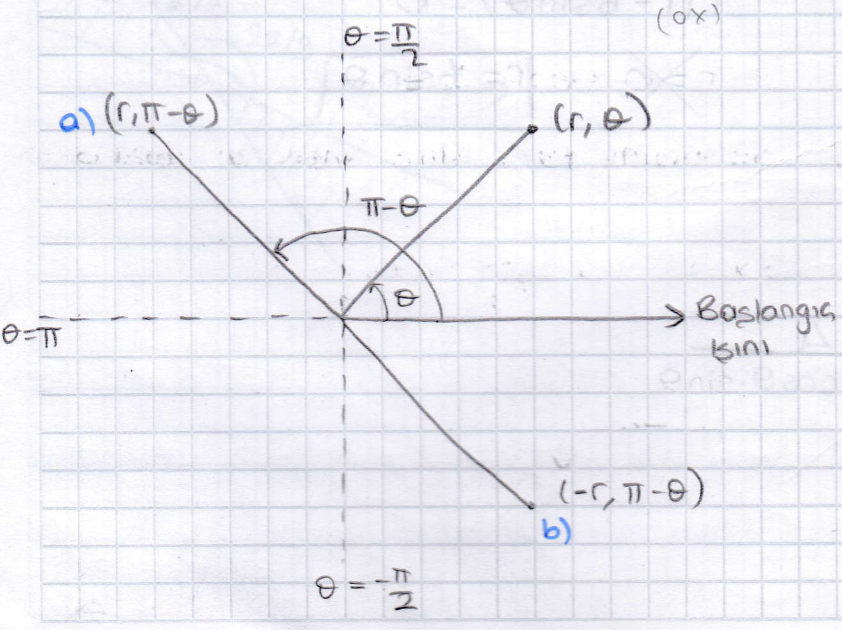
Her iki durumda da inceleme aralığı sadece pozitif değerler için seçilir.

f(θ) yı θ nın pot. değ. için incelemek yeterli, eğri çizilir Ox, π/2 ye göre simetriği al.

2) $\theta \rightarrow \pi - \theta$ yazalım

a) $f(\pi-\theta) = f(\theta)$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusu (y-~~ekseni~~) simetri eksenidir.

b) $f(\pi-\theta) = -f(\theta)$ ise başlangıç ışını (x-ekseni) simetri eksenidir.
(Ox)

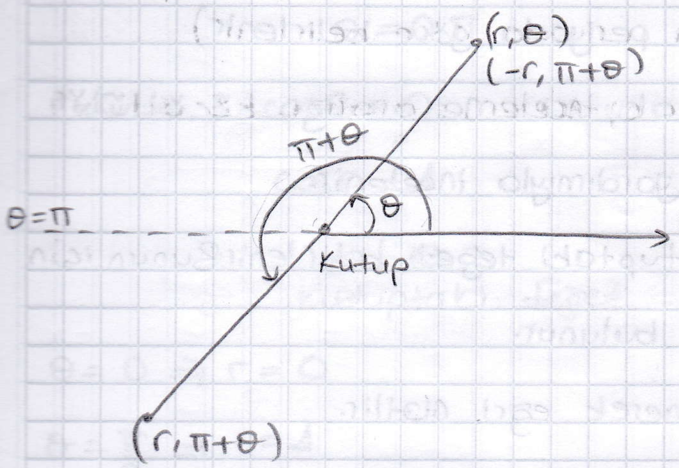


Her iki durumda da inceleme aralığı $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ aralığıdır.

3) $\theta \to \pi+\theta$ yazalım. 0 ya göre simetri var merkezidir

a) $f(\pi+\theta)=f(\theta)$ ise kutup simetri noktasıdır.

b) $f(\pi+\theta)=-f(\theta)$ ise üst üste çakışıktır.



İnceleme π'ye eşit uzunlukta bir aralıkta yapılır

Eğim:

$r=f(\theta)$ eğrisinin eğimi (r,θ) noktasında $\frac{dx}{d\theta}\neq 0$ olmak üzere

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\cdot\sin\theta + f(\theta)\cdot\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\cdot\sin\theta}$$

$x=r\cos\theta$

$=f(\theta)\cos\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\cdot\sin\theta + f(\theta)\cdot\cos\theta$$

$y=r\sin\theta$

$=f(\theta)\cdot\sin\theta$

ÖR $\Rightarrow$ $f(\theta)=$ $r=1-\cos\theta$ eğrisine $\theta=\frac{\pi}{2}$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=1$ $\quad f'(\theta)=\sin\theta$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \cancel{1\cdot\cos\frac{\pi}{2}}^{0}}{\cancel{1\cdot\cos\frac{\pi}{2}}^{0} - 1\cdot\sin\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\cdot\sin\theta + f(\theta)\cdot\cos\theta}{f'(\theta)\cdot\cos\theta - f(\theta)\cdot\sin\theta}$$

$y-y_0 = m\cdot(x-x_0)$

$m \downarrow f'(x_0)$

$y=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

$x=r\cos\theta\Big|_{1,\pi/2}=0$

$y=r\sin\theta\Big|_{1,\pi/2}=1$

$y-1=(-1)\cdot(x-0)$

$\boxed{y=1-x}$

Grafik Çiziminde İzlenen Yol

1) $r=f(\theta)$ fonksiyonunun tanımlı ve sürekli olduğu aralık bulunur. (Bu fonksiyonların çoğu trigonometrik fonksiyonlar olduklarından periyodik fonksiyonlardır ve tanım aralığı periyoda göre belirlenir)

2) Simetri özelliklerinden yararlanılarak inceleme aralığı küçültülür.

3) $r=f(\theta)$ fonksiyonunun değişimi türev yardımıyla incelenir.

4) Eğrinin kutuptan geçen kollarını kutuptaki teğeti belirlenir. Bunun için $r=0$ denklemini sağlayan θ değerleri bulunur.

5) Tüm bu incelemeler tabloda incelenerek eğri çizilir.

ÖR →

$f(\theta)=r=1-\cos\theta$

$f(\theta+T)=f(\theta)$

$1-\cos(\theta+T)\overset{?}{=}1-\cos\theta$

$\cos(\theta+T)=\cos\theta$

$\theta+T-\theta=2\pi$ olmalıdır

periyot $\boxed{T=2\pi}$ → inceleme 2π'ye eşit uzunlukta bir aralıkta yapılabilir

Simetri

1) $\theta \to -\theta$

$f(-\theta)=1-\cos(-\theta)=1-\cos\theta=f(\theta)$

Başlangıç ışını simetri eksenidir. Sadece pozitif değerler için inceleme yapılır.

$[-\pi,\pi] \to [0,\pi]$

2) $\theta \to \pi-\theta$

$f(\pi-\theta)=1-\cos(\pi-\theta)=1-[\cos\pi\cos\theta+\cancel{\sin\pi}^{\,0}\sin\theta]=1+\cos\theta \neq f(\theta)$

$\neq -f(\theta)$

3) $\theta \to \pi+\theta$

$f(\pi+\theta)=1+\cos\theta \neq f(\theta)$

$\neq -f(\theta)$

I.türev

$f'(\theta)=\sin\theta>0$ $[0,\pi]$ aralığında

$f'(\theta)=0 \Rightarrow \sin\theta=0$

$\theta=0,\pi$

$r=0 \Rightarrow 1-\cos\theta=0$

$\cos\theta=1$

$\theta=0$
kutuptaki teğet

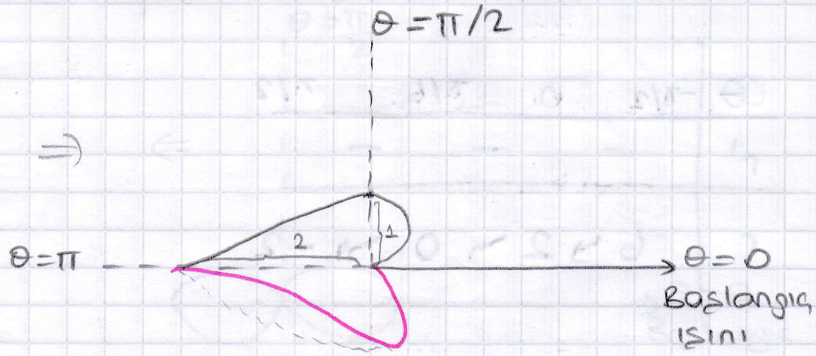
$\theta=0 \Rightarrow r=0$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=1$

$\theta=\pi \Rightarrow r=2$

θ	0	$\pi/2$	π
r'	$+$		$+$
r	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	2

$\Rightarrow$



Kardiod

ÖR $\Rightarrow$

$r=f(\theta)=2-4\sin\theta$

$T=2\pi$ 'ye eşit uzunlukta bir aralıkta inceleme yapılabilir.

Simetri

1) $\theta \rightarrow -\theta$ $\quad f(-\theta)=2-4\sin(-\theta)$
$=2+4\sin\theta$
$\neq f(\theta)$
$\neq -f(\theta)$

2) $\theta \rightarrow \pi-\theta$ $\quad f(\pi-\theta)=2-4\sin(\pi-\theta)$
$=2-4[\cancelto{0}{\sin\pi}\cos\theta-\cos\pi\sin\theta]$
$=2-4\sin\theta$
$=f(\theta)$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ simetri eksenidir. (y-ekseni)

inceleme $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ aralığında yapılmalıdır.

3) $\theta \to \pi+\theta$

$f(\pi+\theta) = 2+4\sin\theta \neq f(\theta)$

$\neq -f(\theta)$

Türev

$f'(\theta) = -4\cos\theta < 0 \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında

$f'(\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

$r = 0 \Rightarrow 2-4\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ kutuptaki teğet

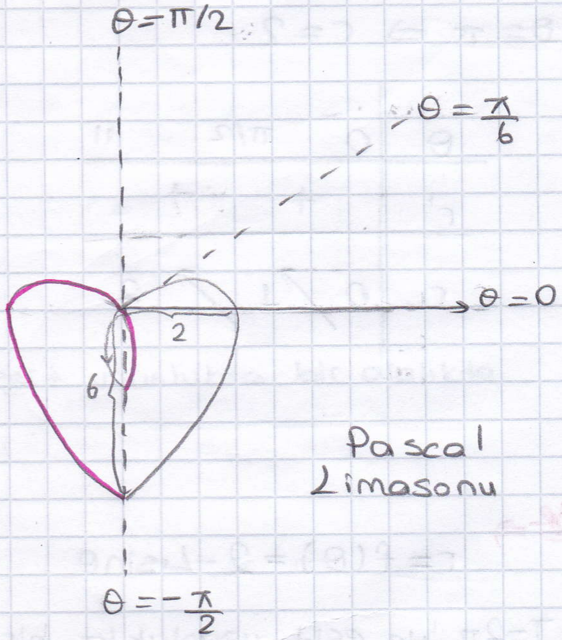
$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 6$

$\theta = 0 \Rightarrow r = 2$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -2$

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/6$	$\pi/2$
r'	$-$	$-$	$-$	
r	$6 \searrow 2$	$\searrow 0$	$\searrow -2$	

$\Rightarrow$



Pascal Limasonu

ÖR $\Rightarrow$ $r = \mp 2\sqrt{\cos\theta}$

$r = 2\sqrt{\cos\theta}$

$T=2\pi$'ye eşit uzunlukta bir aralıkta inceleme yapılabilir.

$\cos\theta > 0 \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

1) $\theta \to -\theta \Rightarrow f(-\theta) = 2\sqrt{\cos(-\theta)} = 2\sqrt{\cos\theta} = f(\theta)$

Başlangıç ışını simetri eksenidir. İnceleme sadece pozitif değerler için yapılır. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2) $\theta \to \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta) = 2\sqrt{\cos(\pi-\theta)} = 2\sqrt{\cos\pi \cdot \cos\theta + \cancel{\sin\pi}^{0} \cdot \sin\theta}$

3) $\theta \to \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta) = 2\sqrt{\cancel{-\cos\theta}}$

Türev

$f'(\theta) = \dfrac{-\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}} < 0 \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ aralığında

$f'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0$

$\theta = 0, \pi$

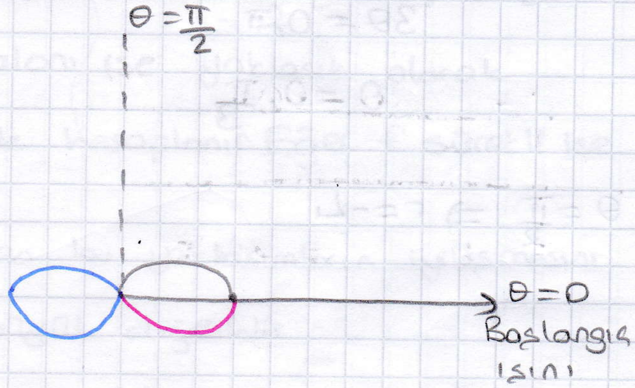
$r = 0 \Rightarrow \sqrt{\cos\theta} = 0$

$\cos\theta = 0$

$\theta = \pi/2$ kutuptaki teğet

$\theta = 0 \Rightarrow r = 2$

θ	0	$\pi/2$
r'	—	
r	2 $\searrow$	0



Ör $\Rightarrow$ $r = 4\sin 3\theta$

$f(\theta + T) = f(\theta)$

$4\sin 3(\theta+T) = 4\sin 3\theta$

$\cancel{3\theta} + 3T - \cancel{3\theta} = 2\pi$

$T = \dfrac{2\pi}{3}$ 'e eşit uzunlukta bir aralıkta inceleme yapılabilir.

$\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

Simetri

1) $\theta \to -\theta$

$f(-\theta) = 4\sin 3(-\theta) = -4\sin 3\theta = -f(\theta)$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğru (y-ekseni) simetri eksenidir. Sadece pozitif değerler için inceleme yapılır.

2) $\theta \to \pi - \theta$

$f(\pi-\theta) = 4\sin 3(\pi-\theta) = 4[\sin 3\pi \cdot \cos 3\theta - \cos 3\pi \cdot \sin 3\theta]$

$= 4\sin 3\theta = f(\theta)$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ simetri eksenidir. İnceleme $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ aralığında yapılmalıdır.

3) $\theta \to \pi+\theta$

$f(\pi+\theta) = 4\sin 3(\pi+\theta) = 4\left[\cancel{\sin 3\pi}^{\,0} \cos 3\theta + \cos 3\pi \sin 3\theta\right] = -4\sin 3\theta = -f(\theta)$

Üst üste çakışıktır. π'ye eşit uzunlukta aralıkta inceleme yapılır.

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Türev

$f'(\theta) = 12\cos 3\theta$

$f'(\theta) = 0 \Rightarrow \cos 3\theta = 0$

$3\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

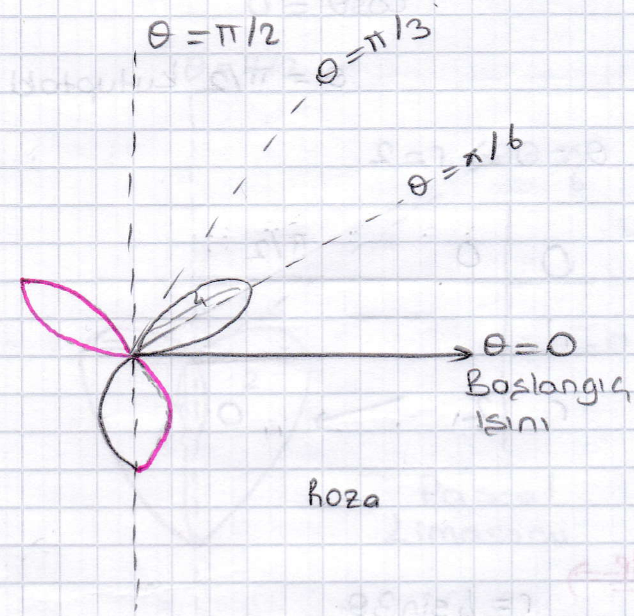
$r = 0 \Rightarrow \sin 3\theta = 0$

$3\theta = 0, \pi$

$\theta = 0, \frac{\pi}{3}$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -4$

θ	0		$\pi/6$		$\pi/3$		$\pi/2$
r'		+		−		−	
r	0	↗	4	↘	0	↘	−4

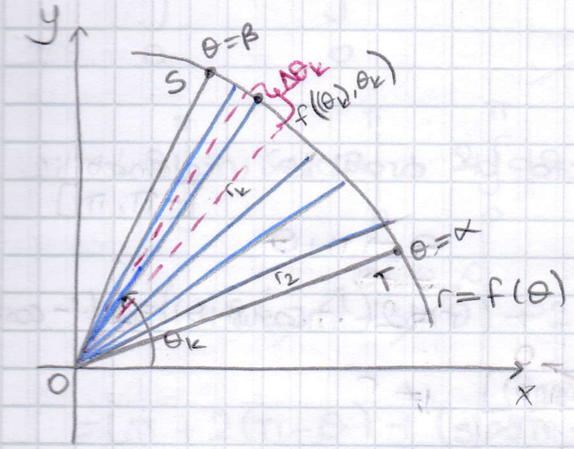


Roza

ÖDEV

$r = \cos 2\theta$

Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar



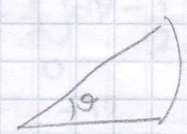
TOS bölgesinin $\theta=\alpha$ $\theta=\beta$ ışınları ve $r=f(\theta)$ eğrisi ile sınırlı olduğunu kabul edelim. Bölgeye n tane üst üste binmeyen tabanları TOS açısının bir P bölünüşünün üzerinde olan pervane şekilli dairesel kesitle yaklaşımda bulunuruz. Bir kesitin yarıçapı $r_k=f(\theta_k)$ ve radyan olarak ölçülen merkez açısı $\Delta\theta_k$'dır. Alanı $\frac{\Delta\theta_k}{2\pi}\cdot r_k$ dairesel alanı olarak veya $A_k=\frac{1}{2}r_k^2\,\Delta\theta_k$

$$=\frac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2\Delta\theta_k$$

şeklinde bulabiliriz. OTS bölgesinin alanı ise yaklaşık olarak

$\sum_{k=1}^{n} A_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[f(\theta_k)\right]^2\cdot\Delta\theta_k$ şeklinde hesaplanır. Eğer f sürekli ise p bölünüşünün normu sıfıra yaklaşırken bu yaklaşımların iyileşmesini bekleriz. p'nin normu $\Delta\theta_k$'nın en büyük değeridir.

$$A=\lim_{\substack{\max(\Delta\theta_k)\to 0\\ \|P\|\to 0}}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{\substack{\max(\Delta\theta_k)\to 0\\ \|P\|\to 0}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[f(\theta_k)\right]^2\Delta\theta_k$$

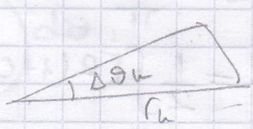


$$=\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\frac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta$$

daire dilim alanı

$\frac{\pi r^2}{2\pi}\cdot\theta$ $\frac{1}{2}r^2\theta$

$r=f(\theta)$ $\alpha\leq\theta\leq\beta$ eğrisi ile orjin arasındaki bir bölgenin alanı elde edilen bu integral ile hesaplanır.



$A=\frac{\pi r_k^2}{2\pi}\Delta\theta_k$

$A=\frac{1}{2}r_k^2\,\Delta\theta_k$

$\cos\theta \to$ her yerde sürekli bir fonksiyon
$\hookrightarrow$ periyodik fonksiyon

Ör $\Rightarrow$ $r=2(1+\cos\theta)$ kardiodiyle çevrili olan alanı hesaplayın.

$$\theta \to \theta + T$$

$$f(\theta+T)=f(\theta)$$

$T=2\pi$'ye eşit uzunlukta bir aralıkta incelenebilir $[-\pi,\pi]$

$\theta \to -\theta$

$r=2(1+\cos(-\theta))=2(1+\cos\theta)=r$

Başlangıç ekseni simetri eksenidir İnceleme sadece pozitif değerler için yapılır

$[-\pi,\pi] \to [0,\pi]$ indirgeyebiliriz

$\theta \to \pi-\theta$

$r=2(1+\cos(\pi-\theta))$

$=2[1+(\underbrace{\cos\pi}_{-1}\cos\theta+\underbrace{\sin\pi}_{0}\cdot\sin\theta)]$

$=2[1-\cos\theta]$

$\neq r$

$=-r$

$\theta \to \pi+\theta$

$r=2(1+\cos(\pi+\theta))=2(1-\cos\theta)$

$\neq r$

$\neq -r$

$r'=-2\sin\theta<0 \to (0,\pi)$ aralığında

$r'=0 \Rightarrow 2\sin\theta=0$

$\theta=0,\pi$

$r=0 \Rightarrow 2(1+\cos\theta)=0$

$\cos\theta=-1 \quad \theta=\pi$

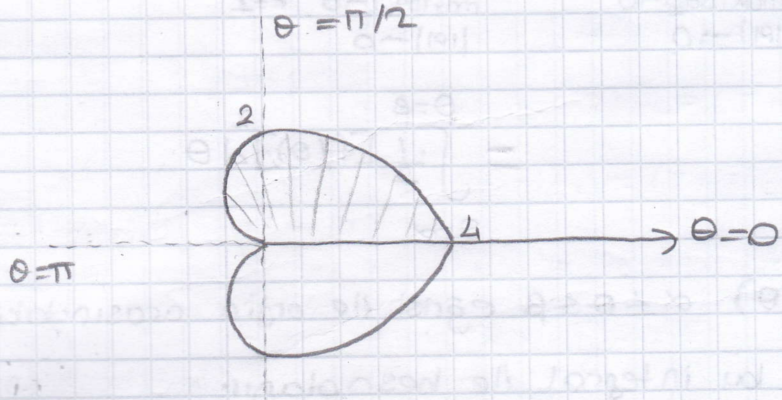
kutuptaki teğet

$\theta=0 \Rightarrow r=4$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=2$

$\theta=\pi \Rightarrow r=0$

θ	0	$\pi/2$	π
r'		$-$	$-$
r	$4 \searrow$	$2 \searrow$	0



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[2(1+\cos\theta)]^2\,d\theta \Rightarrow A=4\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$A = 4\int_0^{\pi} d\theta + 8\int_0^{\pi} \cos\theta \, d\theta + 4\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

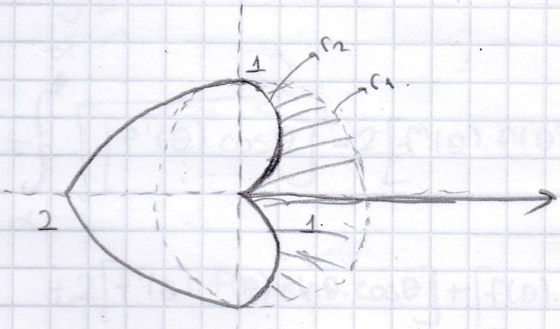
$$= 4\theta\Big|_0^{\pi} + 8\sin\theta\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} d\theta + 2\int_0^{\pi} \cos 2\theta \, d\theta$$

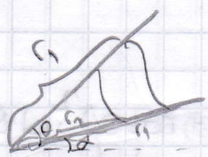
$$= 4\pi + 8(\cancel{\sin\pi}^{0} - \cancel{\sin 0}^{0}) + 2\left(\theta\Big|_0^{\pi}\right) + 2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin 2\theta\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= 4\pi + 2(\pi - 0) + (\cancel{\sin 2\pi}^{0} - \cancel{\sin 0}^{0})$$

$$= 6\pi \text{ br}^2$$

Ör: $r=1$ çemberinin içinde ve $r=1-\cos\theta$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanını bulun.





$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r_1^2 - r_2^2) \, d\theta$$

$$\frac{A}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[1^2 - (1-\cos\theta)^2\right] d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \left[1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\right] d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 2\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$A = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{4}\left(\cancel{\sin\pi}^{0} - \sin 0\right)$$

$$= 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{8-\pi}{4} \text{ br}^2$$

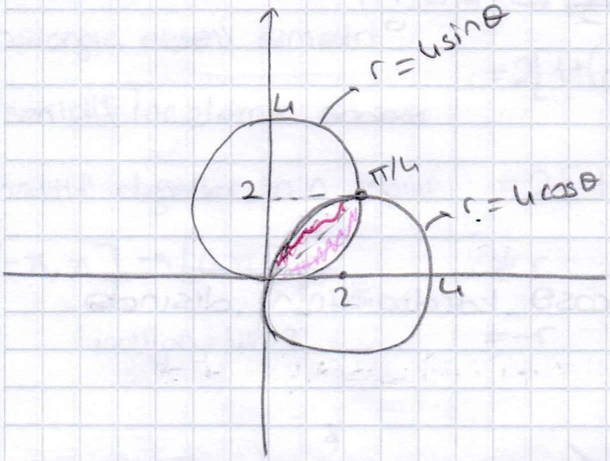
ÖR ⟹ $r=\cos\theta$ ve $r=\sin\theta$ kesişim alanları=?

$r^2=4r\cos\theta$ $\qquad$ $r^2=4r\sin\theta$

$x^2+y^2=4x$ $\qquad$ $x^2+y^2=4y$

$(x-2)^2+y^2=4$ $\qquad$ $x^2-(y-2)^2=4$

$M(2,0)$, $r=2$



$4\sin\theta=4\cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$

$\tan\theta=1$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(4\sin\theta)^2d\theta+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{2}(4+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=8\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta d\theta+8\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/4}(1-\cos2\theta)d\theta+4\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=4\theta\Big|_0^{\pi/4}-2\left(\sin2\theta\Big|_0^{\pi/4}\right)+\left(4\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right)+2\left(\sin2\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right)$$

$$=4\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin0\right)+4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\pi-2+\pi-2$$

$$=\underline{2\pi-4\ br^2}$$

Kutupsal Eğrinin Uzunluğu:

$r=f(\theta)$ $\alpha \le \theta \le \beta$ eğrisinin uzunluğu için kutupsal koordinat formülünü aşağıdaki gibi parametrize ederek elde ederiz

$x = r\cos\theta$

$r=f(\theta)$

$y = r\sin\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= f(\theta)\cos\theta \\ & \qquad \alpha \le \theta \le \beta \\ y &= f(\theta)\sin\theta \end{aligned}}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\right]^2 + \left[f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\right]^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[f'(\theta).\cos\theta\right]^2 - 2\left[f'(\theta).f(\theta).\sin\theta.\cos\theta\right] + \left[f(\theta).\sin\theta\right]^2 + \left[f'(\theta).\sin\theta\right]^2 + 2\left[f'(\theta).f(\theta).\sin\theta.\cos\theta\right] + \left[f(\theta).\cos\theta\right]^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[f'(\theta)\right]^2 + \left[f(\theta)\right]^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\theta$$

$r' = \sin\theta$

Ör =) $r = 1-\cos\theta$ eğrisinin uzunluğunu bulun.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$L = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= -2.2.\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -4.(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= \underline{\underline{8\text{ br}}}$$

Ör =) $r = 1$ Çemberinin uzunluğunu bulun.

$r' = 0$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2+1^2}\, d\theta$$

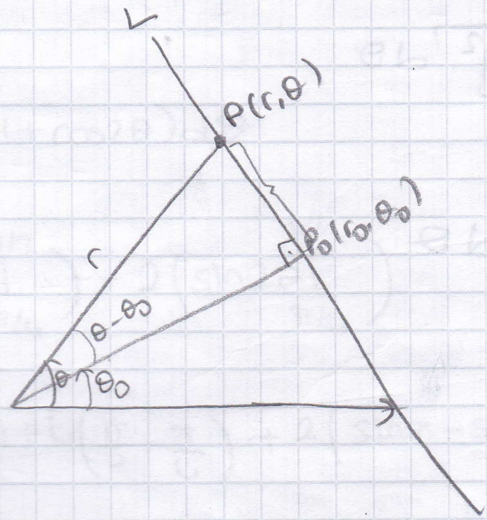
$$= \theta\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi\text{ br}}}$$

DOĞRU DENKLEMİ

$$r = \frac{1}{2\cos\theta - \sin\theta}$$

$$2r\cos\theta - r\sin\theta = 1$$

$$2x - y = 1$$



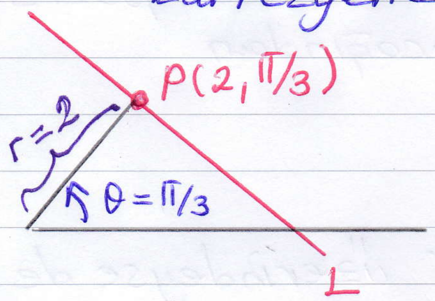
$$\boxed{r_0 = r\cos(\theta-\theta_0)}$$

Orjinden L doğrusuna dik olarak giden doğrunun L'yi $r_0 \geq 0$ olmak üzere $P_0(r_0, \theta_0)$ noktasında kestiğini varsayalım. Bu durumda eğer $P(r,\theta)$, L üzerinde başka bir nokta ise P, P_0 ve kutup noktaları bir dik üçgenin köşelerini oluştururlar. Dolayısıyla

$$r_0 = r\cos(\theta - \theta_0)$$

yazılabilir. Bu bize doğrunun kutupsal denklemini verir.

ÖR ⇒ (Bir doğrunun kutupsal denklemini kartezyene çevirmek)



Şekildeki doğrunun kartezyen denklemini bulun.

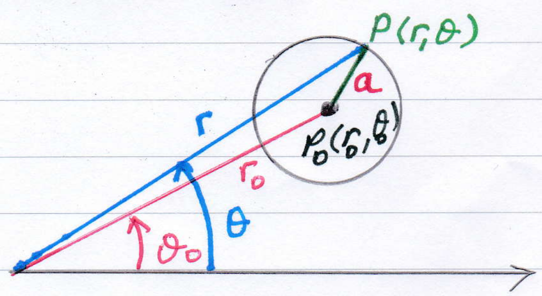
$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\Rightarrow r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 2 \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 4$$

ÇEMBERLER



Merkezi $P_0(r_0, \theta_0)$'da olan a yarıçaplı çemberin kutupsal denklemini bulmak için $P(r,\theta)$'yı çemberin üzerinde bir nokta olarak alır ve OP_0P üçgenine kosinüs kuralını uygularız. Böylece

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)$$

bulunur.

Çember orjinden geçiyorsa $r_0=a$ olur ve denklem

$$\cancel{a^2} = \cancel{a^2} + r^2 - 2ar\cos(\theta-\theta_0)$$

$$r^2 = 2ar\cos(\theta-\theta_0) \Rightarrow r = 2a\cos(\theta-\theta_0)$$

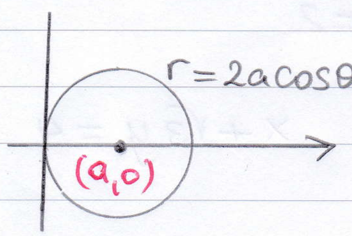
haline indirgenir. Bu çemberin merkezi pozitif x-ekseni üzerindeyse $\theta_0=0$ olacağından

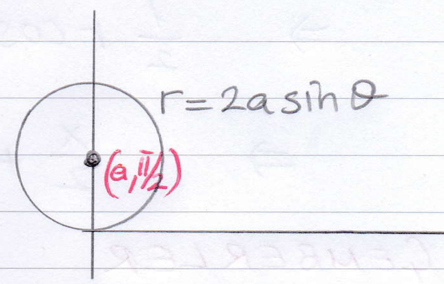
$$r = 2a\cos\theta$$

merkezi pozitif y-ekseni üzerindeyse de $\theta_0=\pi/2$ olacağından

$$r = 2a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = 2a\sin\theta$$

şeklini alır.





Yarıçap	Merkez	Kutupsal Denklem
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \pi/2)$	$r = 4\sin\theta$
$1/2$	$(-1/2, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \pi/2)$	$r = -2\sin\theta$