Kritik Noktaların Sınıflandırılması

Daha karmaşık fonksiyonlar için iç kritik noktaları sınıflandırmak daha zordur. Böyle fonksiyonlar için sınıflandırma h ve k'nın küçük değerlerinde $f(a+h, b+k) - f(a,b) = \Delta f$ farkı gözönüne alınarak yapılabilir. (a,b) noktası fonksiyonun kritik noktasıdır. Eğer $\Delta f > 0$ ise fonksiyon yerel minimum değere $\Delta f < 0$ ise fonksiyon yerel maksimum değere sahiptir. Δf (a,b) noktasının keyfi civarındaki bazı h, k değerleri için pozitif bazıları için negatif ise o zaman fonksiyon (a,b) noktasında bir eyer noktasına sahiptir denir.

Ör/ $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0$$

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$A(0,0) \quad B(1,1)$$

A (0,0)

$$\Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = 2h^3 - 6hk + 3k^2 - 0 = 2h^3 - 6hk + \underbrace{3k^2}_{>0}$$

$(h,0) \rightarrow \Delta f = 2h^3$ $\quad h>0 \Rightarrow \Delta f > 0$, $\quad h<0 \Rightarrow \Delta f < 0$ $\Big\} \Rightarrow$ (0,0) Eyer noktasıdır.

B (1,1)

$$\Delta f = f(1+h, 1+k) - f(1,1) = 2(1+h)^3 - 6(1+h)(1+k) + 3(1+k)^2 - (2-6+3)$$

$$= 2\left[1+3h+3h^2+h^3\right] - 6(1+h+k+hk) + 3(1+2k+k^2) + 1$$

$$= \cancel{2} + \cancel{6h} + 6h^2 + 2h^3 - \cancel{6} - \cancel{6h} - \cancel{6k} - 6hk + \cancel{3} + \cancel{6k} + 3k^2 + \cancel{1}$$

$$= 6h^2 + 2h^3 - 6hk + 3k^2$$

$$= 3h^2 + 2h^3 + 3h^2 - 6hk + 3k^2$$

$$= \underbrace{h^2}_{>0}\left[3+2h\right] + 3\underbrace{\left[h-k\right]^2}_{>0}$$

$|h| < \frac{3}{2}$ için $\Delta f > 0$ yerel minimuma sahiptir.

Daha da karmaşık fonksiyonlar için verdiğimiz bu yöntem de sınıflandırmada kolaylık sağlamaz. Bunun için aşağıdaki teorem ile vereceğimiz yöntemi kullanmamız gerekir.

Teorem (İkinci türev testi)

$z=f(x,y)$ fonksiyonu, birinci ve ikinci mertebeden türevleri bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. Bir $(a,b)\in D$ noktasında

- $$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}=0$$
$$\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}\right]^2-\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\right]<0$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}=B \\ \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}=A \\ B^2-AC<0\end{array}\right. \qquad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}=C$$

ise fonksiyon bu noktada bir maksimum veya minimuma sahiptir. Ve

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}<0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}<0 \quad \text{ise maksimum değere}$$

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}>0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}>0 \quad \text{ise minimum değere sahiptir.}$$

- $B^2-AC>0$ ise fonksiyonun maksimum minimum değeri yoktur.
- $B^2-AC=0$ ise test cevap vermez. (a,b) noktası bu durumda maksimum veya minimum veyahut eyer noktası olabilir.

İSPAT: Fonksiyonun (a,b) noktasında ikinci mertebeden türevler dahil Taylor formülünü gözönüne alalım.

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(a,b) + R_2$$

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = h\underbrace{\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}}_{=0} + k\underbrace{\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}}_{=0} + \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\right] + R_2$$

(Teoremin hipotezinden)

$$\underbrace{f(a+h,b+k) - f(a,b)}_{\Delta f} = \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\right] + R_2$$

(a,b) noktasının maksimum veya minimum olabilmesi için Δf'in işareti daima negatif veya daima pozitif olmalıdır. O halde eşitliğin sağ tarafının işaretini inceleyelim.

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(a+\theta h, b+\theta k) \qquad 0<\theta<1$$

Bu kalan teriminde h ve k öyle seçilebilir ki yani (a,b) noktasının öyle uygun bir civarı bulunabilir ki, bu bölge içinde R_2'nin değeri bir önceki parantezin değerinden daha küçük kalır. O halde eşitliğin sağ tarafının işaretine sadece parantezin aldığı değere göre karar verilebilir.

$$h^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}$$

$$k^2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}+2\left(\frac{h}{k}\right)\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\right]$$

Bu elde edilen son ifade $\left(\frac{h}{k}\right)$'ya göre 2. dereceden bir polinomdur. Bu polinomun köklerini bulmak istersek;

$$\Delta=\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}\right]^2-\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\right]$$

d

Eğer $\Delta>0$ ise birbirinden farklı iki reel kök vardır ve 2. dereceden polinomun işareti kökler arasında farklı kökler dışında farklıdır. Dolayısıyla Δf'in işareti hep negatif veya hep pozitif olamaz. O halde max, min yoktur. (a,b) eyer noktasıdır.

$\Delta<0$ ise reel kök olmayacağından $\left(\frac{h}{k}\right)^2$'sinin işareti ile Δf'in işareti aynı olur.

Yani $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow f(a+h, b+k) - f(a,b) > 0$ olur ki bu durumda fonksiyon

(a,b) noktasında minimum değere sahiptir.

$\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0$ olur ki bu durumda da fonksiyon

(a,b) noktasında maksimum değere sahiptir.

$\Delta = 0$ ise $f(a+h, b+k) - f(a,b)$'nin işaretini belirleyemeyiz.

Ör/ $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6x + 6y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$(0,0)$, $(1,1)$ kritik noktalardır.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$$

$\underbrace{(0,0)}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= 0 = A \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} &= -6 = B \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= 6 = C \end{aligned}\right\}$$

$B^2 - AC = 36 - 0 = 36 > 0$

max, min yoktur. $(0,0)$ Eyer noktasıdır.

$\underset{\sim\sim\sim}{(1,1)}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} &= 12 = A \\ \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y} &= -6 = B \\ \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} &= 6 = C \end{aligned}\right\} \quad B^2 - AC = 36 - 72 = -36 < 0 \text{ max, min var}$$

$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = 12 > 0$ olduğundan minimum değer vardır.

Ör $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 6xy + 6$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 6y = 0 \Rightarrow 6y(x-1) = 0$

$\nearrow y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$ $\quad x = 0 \quad x = 2$

$\searrow x = 1 \Rightarrow 3y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \mp 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$

$(0,0), (2,0), (1,1), (1,-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x - 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

$\underset{\sim\sim\sim}{(0,0)}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= 0 = A \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} &= -6 = B \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= 0 = C \end{aligned}\right\} \quad B^2 - AC = 36 > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ Eyer noktası}$$

$\underline{(2,0)}$

$$\frac{\partial^2 f(2,0)}{\partial x^2} = 0 = A$$

$$\frac{\partial^2 f(2,0)}{\partial y \partial x} = 6 = B$$

$$\frac{\partial^2 f(2,0)}{\partial y^2} = 0 = C$$

$$B^2 - AC = 36 > 0 \Rightarrow \text{Eyer noktası}$$

$\underline{(1,1)}$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = 6 = A$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = 6 = C$$

$$B^2 - AC = 0 - 36 = -36 < 0 \quad \text{max, min var}$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = 6 > 0 \quad \text{min var.}$$

$\underline{(1,-1)}$

$$\frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial x^2} = -6 = A$$

$$\frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial y \partial x} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial y^2} = -6 = C$$

$$B^2 - AC = 0 - (-6)(-6) = -36 < 0 \quad \text{max, min var}$$

$$\frac{\partial^2 f(1,-1)}{\partial x^2} = -6 < 0 \quad \text{max. var.}$$

Üç değişkenli fonksiyonlar için maksimum ve minimum.

Bir V bölgesinde tanımlı ve sürekli olan $u=f(x,y,z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $(a,b,c)\in V$ olsun. h_1, h_2 ve h_3 yeter derecede küçük seçilebilen sayılar olmak üzere $|x-a|<h_1$, $|y-b|<h_2$ $|z-c|<h_3$ civarındaki tüm (x,y,z) noktaları için

$$f(x,y,z)<f(a,b,c)$$

veya diğer bir deyişle

$$f(a+h_1, b+h_2, c+h_3)<f(a,b,c)$$

ise $f(a,b,c)$'ye fonksiyonun yerel maksimum değeri denir.

Tersine $f(x,y,z)>f(a,b,c)$ veya $f(a+h_1, b+h_2, c+h_3)>f(a,b,c)$ ise $f(a,b,c)$'ye fonksiyonun yerel minimum değeri denir. Bu eşitsizlikler kapalı V bölgesinde sağlanıyorsa da $f(a,b,c)$'ye mutlak maksimum veya mutlak minimum denir.

Teorem: $u=f(x,y,z)$ fonksiyonu ve birinci mertebeden kısmi türevleri bir V bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. V bölgesine ait bir (a,b,c) noktasında fonksiyonun maksimum veya minimum değere sahip olması için gerek koşul bu noktada

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial z}=0$$

olmasıdır.

Tanım :

$$F(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,x_i\,x_j \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

şeklindeki bir fonksiyona üç değişkenli kuadratik form denir.

$$F(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2$$

Eğer $F(x_1,x_2,x_3)>0$ ise kuadratik form pozitif tanımlı

$F(x_1,x_2,x_3)<0$ ise kuadratik form negatif tanımlı denir.

İki değişkenli kuadratik form

$$F(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2$$

$$=\underbrace{a_{11}}_{a}x_1^2+\underbrace{2a_{12}}_{2b}x_1x_2+\underbrace{a_{22}}_{c}x_2^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta>0 \Rightarrow 2$ kök. $\Delta<0 \Rightarrow b^2-ac<0$

$F(x_1,x_2)>0 \Leftrightarrow a>0,\ b^2-ac<0 \rightarrow a>0 \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$

$F(x_1,x_2)<0 \Leftrightarrow a<0,\ b^2-ac<0 \rightarrow a<0 \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$

Yardımcı Teorem:

Üç değişkenli kuadratik form

$a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$ pozitif tanımlı

$a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ negatif tanımlıdır.

İSPAT: $F(x_1,x_2,x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2$

$a_{12}=a_{21}$
$a_{13}=a_{31}$
$a_{23}=a_{32}$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

x_1^2 ve x_1'e göre düzenleyelim.

$$F(x_1,x_2,x_3) = a_{11}x_1^2 + [2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3]x_1 + [a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2]$$

$A = a_{11}$ $\quad B = a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ $\quad C = a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$

diyelim.

$\Rightarrow F(x_1, x_2, x_3) = A x_1^2 + 2B x_1 + C$ şeklinde bir kuadratik formun pozitif olması için;

Yani; $F > 0 \Rightarrow A > 0 \quad B^2 - AC < 0$ olmalıdır.

$$B^2 - AC = (a_{12} x_2 + a_{13} x_3)^2 - a_{11} \left[a_{22} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 \right]$$

$$= a_{12}^2 x_2^2 + 2 a_{12} a_{13} x_2 x_3 + a_{13}^2 x_3^2 - a_{11} a_{22} x_2^2 - 2 a_{11} a_{23} x_2 x_3 - a_{11} a_{33} x_3^2$$

$$= \left[a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \right] x_2^2 + 2 \left[a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23} \right] x_2 x_3 + \left[a_{13}^2 - a_{11} a_{33} \right] x_3^2$$

$$= \underbrace{\left[a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} \right]}_{D} x_2^2 + 2 \underbrace{\left[a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23} \right]}_{E} x_2 x_3 + \underbrace{\left[a_{13} a_{31} - a_{11} a_{33} \right]}_{F} x_3^2$$

$B^2 - AC < 0$ olması için

$a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} < 0$ ve $E^2 - DF < 0$ olmalı.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$E^2 - DF = (a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23})^2 - (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})(a_{13} a_{31} - a_{11} a_{33})$$

$$= (a_{12} a_{13})^2 - 2 a_{12} a_{13} a_{11} a_{23} - (a_{11} a_{23})^2 - \left[a_{12} a_{21} a_{13} a_{31} - a_{11} a_{33} a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} a_{13} a_{31} + a_{11}^2 a_{22} a_{33} \right]$$

$$= \cancel{a_{12} a_{21} a_{13} a_{31}} - 2 a_{12} a_{13} a_{11} a_{23} - a_{11}^2 a_{23} a_{32} \cancel{- a_{12} a_{21} a_{13} a_{31}} + a_{11} a_{33} a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22} a_{13} a_{3} - a_{11}^2 a_{22} a_{33}$$

$$= a_{11}\left[a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}\right] < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_{11}}_{>0} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{olmalı.}$$

$\Rightarrow$ Sonuç olarak; $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow F(x_1, x_2, x_3)$ pozitif tanımlıdır.

Teorem: $u = f(x, y, z)$ fonksiyonu, birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri bir V bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. Bir $(a, b, c) \in V$ noktasında

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial z} = 0$$

ve $\dfrac{\partial^2 f(a,b,c)}{\partial x^2} < 0$, $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ fonksiyonun bu noktada bir maksimum değeri vardır.

İspat: