

Regüler Sturm-Liouville Problemi

$$a < x < b$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad \wedge \quad (1)$$

diferansiyel denklemi ile

$$\left. \begin{array}{l} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

ayrılabilir sınır koşullarıyla oluşan sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada p, q ve r x 'in reel fonksiyonları, λ x 'den bağımsız bir parametre ve $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ -dir.

(1)-(2) probleme Sturm-Liouville problemi (sistemi) denir.

Tanım: (1) denklemindeki $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ 'de sürekli ve $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ ise Sturm-Liouville problemine Regüler S-L problemi denir.

$C^2[a, b]$ den $C[a, b]$ 'ye

$$L(y) = -y'' + q(x)y$$

dif. operatörünü gözönüne alalım. Burada $q(x)$, $[a, b]$ 'de reel değerli sürekli bir fonksiyondur ve L bir lineer operatördür.

$$y, z \in C^2[a, b] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} L(\alpha y + \beta z) &= -(\alpha y + \beta z)'' + q(x)(\alpha y + \beta z) \\ &= -\alpha y'' - \beta z'' + q(x)\alpha y + q(x)\beta z \\ &= \alpha [-y'' + q(x)y] + \beta [-z'' + q(x)z] \\ &= \alpha L(y) + \beta L(z) \end{aligned}$$

$L(y)$ için esas sınır koşulları

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} \cos \alpha y(a) + \sin \alpha y'(a) &= 0 \\ \cos \beta y(b) + \sin \beta y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned}$$

Burada esas olarak;

$$L(y) = -y'' + q(x)y = \lambda y \quad (3)$$

diff. denklemi ve

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha y(a) + \sin \alpha y'(a) &= 0 \\ \cos \beta y(b) + \sin \beta y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Sınır koşullarıyla oluşturulan Regüler Sturm-Liouville problemi inceleyeceğiz.

$a=0, b=\pi$ almak suretiyle (3)-(4) problemi inceleyelim.

$\frac{x-a}{b-a} \cdot \pi = t$ denirse o zaman $[a,b]$ aralığı $[0,\pi]$ 'ye dönüşür.

Regüler S-L probleminin Özellikleri

$$\begin{cases} L(y) = -y'' + q(x)y = \lambda y \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha y(0) + \sin \alpha y'(0) = 0 \\ \cos \beta y(\pi) + \sin \beta y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

1.) Bir $\lambda = \lambda_1$ sayısı için sıfırdan farklı $y_1(x) \in C^2[0,\pi]$ fonksiyonu (5) sınır değer probleminin çözümünü ise λ_1 sayısına problemin özdeğeri, bu özdeğere karşılık gelen $y_1(x)$ çözümüne de problemin özfonksiyonu (özvektörü) denir.

$D(L)$ ile $[0,\pi]$ aralığında tanımlı 2. mertebeden sürekli türevi olan ve (6) sınır koşullarını sağlayan fonksiyonların kümesini gösterelim. $D(L)$, $C[0,\pi]$ uzayının bir lineer manifoldudur.

2.) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (5)-(6) sınır değer probleminin herhangi iki özdeğeri ve y_1, y_2 'de sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise o zaman

$$\int_0^\pi y_1(x) \cdot y_2(x) dx = 0$$

İSPAT: f ve $g \in C^2[0, \pi]$ 'nin herhangi iki elemanı olsun. Kısmi integrasyondan yararlanarak;

$$\int_0^{\pi} f''(x) \cdot g(x) dx = f'(x) \cdot g(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot g'(x) dx = f'(\pi)g(\pi) - f'(0)g(0) - \left[f(x)g'(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)g''(x) dx \right]$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \bullet g(x) = u &\Rightarrow g'(x) dx = du \\ f''(x) dx &= dv \Rightarrow f'(x) = v \\ \bullet g'(x) = u &\Rightarrow g''(x) dx = du \\ f'(x) dx &= dv \Rightarrow f(x) = v \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= f'(\pi)g(\pi) - f'(0)g(0) - (f(\pi)g'(\pi) - f(0)g'(0)) + \int_0^{\pi} f(x) \cdot g''(x) dx \\ &= [f'(\pi)g(\pi) - f(\pi)g'(\pi)] + [f(0)g'(0) - f'(0)g(0)] + \int_0^{\pi} f(x) \cdot g''(x) dx \\ &= W_0(f, g) - W_{\pi}(f, g) + \int_0^{\pi} f(x) \cdot g''(x) dx \end{aligned}$$

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

$$\int_0^{\pi} L(y_1) \cdot y_2 dx = \int_0^{\pi} [-y_1'' + q(x)y_1] \cdot y_2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} -y_1'' y_2 dx + \int_0^{\pi} q(x) \cdot y_1 \cdot y_2 dx$$

$$= W_{\pi}(y_1, y_2) - W_0(y_1, y_2) + \int_0^{\pi} y_1 \cdot y_2'' dx + \int_0^{\pi} q(x) y_1 \cdot y_2 dx$$

$$= W_{\pi}(y_1, y_2) - W_0(y_1, y_2) + \int_0^{\pi} [-y_2'' + q(x)y_2] y_1 dx = W_{\pi}(y_1, y_2) - W_0(y_1, y_2) + \int_0^{\pi} y_1 \cdot L(y_2) dx$$

$$W_0(y_1, y_2) = y_1(0) y_2'(0) - y_2(0) y_1'(0) \quad , \quad W_\pi(y_1, y_2) = y_1(\pi) y_2'(\pi) - y_2(\pi) y_1'(\pi)$$

$$y_1'(0) \cos \alpha + y_1'(0) \sin \alpha = 0$$

$$y_1(0) = -y_1'(0) \tan \alpha$$

$$y_1(\pi) \cos \beta + y_1'(\pi) \sin \beta = 0$$

$$y_1(\pi) = -y_1'(\pi) \tan \beta$$

$$W_0(y_1, y_2) = -y_1'(0) \tan \alpha \cdot y_2'(0) - [-y_2'(0) \tan \alpha] \cdot y_1'(0) \quad , \quad W_\pi(y_1, y_2) = 0$$

$$= 0$$

$$\int_0^\pi y_2 \cdot l(y_1) dx = W_\pi(y_1, y_2) - W_0(y_1, y_2) + \int_0^\pi y_1 \cdot l(y_2) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi y_2 l(y_1) dx = \int_0^\pi y_1 l(y_2) dx$$

$$l(y_1) = \lambda_1 y_1$$

$$l(y_2) = \lambda_2 y_2$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \lambda_1 y_1 y_2 dx = \int_0^\pi \lambda_2 y_1 y_2 dx$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\neq 0}) \int_0^\pi y_1 \cdot y_2 dx = 0 \Rightarrow \int_0^\pi y_1 \cdot y_2 dx = 0$$

Teorem : (Lagrange Özdeşliği)

u ve v , $[a, b]$ aralığında C^2 sınıfından iki fonksiyon olsun. O takdirde

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx} [p(x) \cdot W(u, v)]$$

dir. $W(u, v)$, u ve v 'nin Wronskianıdır.

İSPAT : $L(u) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u$
 $= (p \cdot u')' + q(x)u$

$$L(v) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dv}{dx} \right] + q(x)v$$
$$= (p(x) \cdot v')' + q(x)v$$

$$\begin{aligned} uL(v) - vL(u) &= u \cdot [(p(x) \cdot v')' + q(x)v] - v \cdot [(p(x)u')' + q(x)u] \\ &= u(p(x)v')' + \cancel{q(x) \cdot u \cdot v} - v \cdot (p(x)u')' - \cancel{q(x)u \cdot v} \\ &= u(p(x)v')' - v(p(x)u')' + \cancel{p u' v' - p \cdot u' v'} \\ &= [u(p(x)v')' + u'(p(x)v')] - [v(p(x)u')' + v'(p(x)u')] \\ &= [u \cdot (p(x)v')] - [v \cdot (p(x)u')] \\ &= \{ p(x) [uv' - vu'] \}' = [p(x) \cdot W(u, v)]' \end{aligned}$$

Teorem : (Green Formülü)

u ve v , $[a, b]$ 'de C^2 sınıfından iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b [u L(v) - v L(u)] dx = p(x) \cdot W(u, v) \Big|_a^b$$

3) Regüler S-L probleminin özdeğerleri reel sayılardır.

İSPAT: λ_1 , (5)-(6) probleminin bir özdeğeri ve $y_1(x)$ de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde

$$L(y_1) = -y_1'' + q(x)y_1 = \lambda_1 y_1$$

$$y_1(0) \cos \alpha + y_1'(0) \sin \alpha = 0$$

$$y_1(\pi) \cos \beta + y_1'(\pi) \sin \beta = 0$$

dir. Bu denklemin ve sınır koşullarının her iki tarafının kompleks eşleniğini alalım.

$$L(\bar{y}_1) = -[\bar{y}_1]'' + q(x)\bar{y}_1 = \bar{\lambda}_1 \bar{y}_1$$

$$\bar{y}_1(0) \cos \alpha + \bar{y}_1'(0) \sin \alpha = 0$$

$$\bar{y}_1(\pi) \cos \beta + \bar{y}_1'(\pi) \sin \beta = 0$$

$$\bar{y}_1 \leftarrow \bar{\lambda}_1 = \lambda_2 \quad (\bar{\lambda}_1 = \lambda_2 \text{ aldık})$$

$$L(y_1) = -y_1'' + q(x)y_1 = \lambda_1 y_1 \quad \text{denkleminin her iki tarafını } \bar{y}_1 \text{ ile çarpıp, } 0 \text{ dan } \pi \text{ 'ye integre edersek}$$

$$\int_0^\pi L(y_1) \cdot \bar{y}_1 dx = \int_0^\pi (\lambda_1 y_1) \bar{y}_1 dx = \lambda_1 \int_0^\pi y_1 \cdot \bar{y}_1 dx = \lambda_1 \int_0^\pi |y_1|^2 dx.$$

Green formülünden

$$\begin{aligned} \int_0^\pi L(y_1) \cdot \bar{y}_1 dx &= \int_0^\pi y_1 L[\bar{y}_1] dx \\ &= \int_0^\pi y_1 \cdot \bar{\lambda}_1 \bar{y}_1 dx \\ &= \bar{\lambda}_1 \int_0^\pi y_1 \bar{y}_1 dx \\ &= \bar{\lambda}_1 \int_0^\pi |y_1|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \int_0^\pi |y_1|^2 dx = \bar{\lambda}_1 \int_0^\pi |y_1|^2 dx$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \bar{\lambda}_1 \Rightarrow \lambda_1 \text{ reel dir.}$$

Not: y_1 aşıhâr olmayan çözüm olduğundan
 $\int_0^\pi |y_1|^2 dx > 0$ 'dır.

4) Regüler S-L probleminin özdeğerleri monoton artan bir dizi teşkil eder.

Bu teorem, Regüler S-L probleminin sonsuz çoklukta özdeğerlere sahip olduğunu ve bu özdeğerlerin $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \rightarrow \infty$ olmak üzere $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ şeklinde sıralanabileceğini ifade eder. Eğer y_n

λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon ise, $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ özfonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında ortogonaldır. Yani

$$\int_0^{\pi} y_n(x) \cdot y_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_0^{\pi} |y_n(x)|^2 dx = k_n \quad \text{olsun. } k_n > 0 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{k_n} \cdot |y_n(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\pi} \underbrace{\left[\frac{|y_n(x)|}{\sqrt{k_n}} \right]^2}_{\varphi_n} dx = 1. \quad (n=1, 2, \dots)$$

$\{\varphi_n\} = \left\{ \frac{y_n}{\sqrt{k_n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine ortonormal özfonksiyon dizisi denir.

$\sqrt{k_n}$ 'e y_n 'in normu denir.

$$\sqrt{k_n} = \|y_n\| = \sqrt{\int_0^{\pi} |y_n|^2 dx}$$

$\{y_n\} \rightarrow$ ortogonal özfonk. dizisi

$\{\varphi_n\} = \left\{ \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\} \rightarrow$ ortonormal özfonk. dizisi

~~ör~~ $y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < L)$ } probleminin ortonormal öz fonksiyon sistemini bulunuz.
 $y(0) = 0$
 $y(L) = 0$

$$y'' + \lambda y = 0 \quad : \text{K.D: } r^2 + \lambda = 0$$

• 3

• 1

• 2

$\lambda > 0 \rightarrow \lambda = \mu^2 \Rightarrow r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\mu^2 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \mu i$
 $y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sinh \mu x$

$\lambda = 0 \rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0 \Rightarrow y = Ax + B$

$\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -\mu^2 \Rightarrow r^2 = \mu^2 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \mu$
 $y = c_3 e^{-\mu x} + c_4 e^{\mu x}$

• 1 $\Rightarrow y = Ax + B \Rightarrow y(0) = A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y = Ax$

$y(L) = 0 \Rightarrow A \cdot L = 0 \Rightarrow A = 0$
 $\neq 0$

Sadece aşikar
çözüm var.

• 2 $\Rightarrow y = c_3 e^{-\mu x} + c_4 e^{\mu x} \Rightarrow y(0) = c_3 + c_4 = 0 \Rightarrow c_3 = -c_4$

$\Rightarrow y = -c_4 e^{-\mu x} + c_4 e^{\mu x} = c_4 (e^{\mu x} - e^{-\mu x})$

$\Rightarrow y(L) = 0 \Rightarrow c_4 (\underbrace{e^{\mu L} - e^{-\mu L}}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow$

Sadece aşikar
çözüm vardır.

$$3. y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x \Rightarrow y(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \sin \mu x$$

$$y(L) = c_2 \sin \mu L = 0 \Rightarrow \sin \mu L = 0$$

$$\mu L = n\pi$$

$$\mu = \frac{n\pi}{L} \quad \lambda = \mu^2 \Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$y_n = c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (0 \leq x \leq L) \quad \text{özfunk.}$$

$$\|y_n\| = \sqrt{\int_0^L c_n^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx}$$

$$= c_n \cdot \sqrt{\frac{L}{2}}$$

$$\{\varphi_n\} = \left\{ \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\int_0^L c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot c_m \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

$$\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \int_0^L \frac{1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}}{2} dx$$

$$= \int_0^L \frac{dx}{2} - \frac{1}{2} \int_0^L \cos \frac{2n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{1}{2} x \Big|_0^L - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L} \Big|_0^L$$

$$= \frac{L}{2}$$

Teorem: $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, Regüler S-L probleminin ortonormal özfonksiyonlar dizisi olsun. Eğer, f $[a,b]$ de sürekli, f' , $[a,b]$ 'de parçalı sürekli ve f sınır koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonu $[a,b]$ 'de düzgün ve mutlak yakınsak

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

seri açılımına sahiptir. c_n katsayıları

$$c_n = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x) dx$$

şeklinde hesaplanır.

Teorem: $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, Regüler S-L probleminin ortonormal özfonksiyonlar dizisi olsun. Eğer, f ve f' $[a,b]$ de parçalı sürekli ise bu taktirde (a,b) aralığındaki herhangi bir x için

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \frac{1}{2} [f_+(x) + f_-(x)]$$

dir.

ör/ $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ fonksiyonunu

$$\left. \begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{array} \right\} \text{S-L probleminin öz fonksiyonları cinsinden serüye açınız.}$$

$$r^2 + \lambda y = 0 \quad \lambda = \mu^2 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \mu i$$

$$\lambda > 0$$

$$\begin{aligned} \|y_n\| &= \sqrt{\int_0^\pi c_n^2 \sin^2 \frac{(2n-1)x}{2} dx} \\ \int_0^\pi \sin^2 \frac{(2n-1)x}{2} dx &= \int_0^\pi \left[\frac{1 - \cos(2n-1)x}{2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2n-1)x dx \\ &= \frac{x}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y = c_2 \sin \mu x \Rightarrow y' = c_2 \mu \cos \mu x$$

$$y'(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \mu \cos \mu \pi = 0$$

$$\cos \mu \pi = 0 \Rightarrow \mu \pi = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\mu = \frac{2n-1}{2} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$y_n = c_n \sin \frac{(2n-1)x}{2}$$

$$\|y_n\| = c_n \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\{\varphi_n\} = \left\{ \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right\}$$

$$c_n = \int_0^\pi f \cdot \varphi_n dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx + \int_{\pi/2}^\pi 1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3} \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\pi/2}^\pi \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx$$

$$x=u$$

$$dx=du$$

$$\sin \frac{(2n-1)x}{2} dx = dv$$

$$-\frac{2}{2n-1} \cdot \cos \frac{(2n-1)x}{2} = v$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3} \left[-\frac{2x}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)x}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{2}{2n-1} \int_0^{\pi/2} \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx \right] + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(-\frac{2}{2n-1} \right) \cdot \cos \frac{(2n-1)x}{2} \Big|_{\pi/2}^\pi$$

$$= \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2} (2n-1)^2} \sin \left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2} (2n-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \frac{(2n-1)x}{2}$$