1. Sturm-Liouville ve Dirac Operatörü, B.M. Levitan, I.S. Sargosjan
2. İkinci mertebeden Diferansiyel denklemler ile birleştirilmiş özfonksiyon dağılımları, E.G Titchmarsh
3. Adi diferansiyel denklemler teorisi Coddington-Levinson

İkinci Mertebeden Lineer Sınır Değer Problemleri

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x) \qquad a < x < b \qquad (1)$$

diferansiyel denklemi ve

$$a_{11}\,y(a) + a_{12}\,y'(a) + b_{11}\,y(b) + b_{12}\,y'(b) = \gamma_1 \qquad (2)$$

$$a_{21}\,y(a) + a_{22}\,y'(a) + b_{21}\,y(b) + b_{22}\,y'(b) = \gamma_2 \qquad (3)$$

sınır koşullarıyla oluşturulan problem en genel şekliyle ikinci mertebeden bir Lineer sınır değer problemidir.

Burada a_{ij}'ler $(i=1,2,\; j=1,2)$ ve γ_i·ler birer reel sabittir.

Sınır koşulları bağımsız değişkenin farklı iki noktasında verildiğinden probleme iki nokta sınır değer problemi de denir.

$F(x) \equiv 0$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ise problem homojen sınır değer problemi olacaktır.

Teorem 1: y_1 ve y_2

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad a<x<b \qquad (4)$$

$$a_{11}y(a)+a_{12}y'(a)+b_{11}y(b)+b_{12}y'(b)=0 \qquad (5)$$

$$a_{21}y(a)+a_{22}y'(a)+b_{21}y(b)+b_{22}y'(b)=0 \qquad (6)$$

homojen sınır değer probleminin birbirlerinden lineer bağımsız iki çözümü olsun. (4)-(6) probleminin aşikâr olmayan çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} a_{11}y_1(a)+a_{12}y_1'(a)+b_{11}y_1(b)+b_{12}y_1'(b) & a_{11}y_2(a)+a_{12}y_2'(a)+b_{11}y_2(b)+b_{12}y_2'(b) \\ a_{21}y_1(a)+a_{22}y_1'(a)+b_{21}y_1(b)+b_{22}y_1'(b) & a_{21}y_2(a)+a_{22}y_2'(a)+b_{21}y_2(b)+b_{22}y_2'(b) \end{vmatrix}=0 \qquad (7)$$

olmasıdır.

İSPAT: y_1 ve y_2 (4)'ün lineer bağımsız çözümleri olduğundan c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$y=c_1y_1+c_2y_2$ (4)'ün genel çözümüdür. Sınır şartları uygulanırsa c_1 ve c_2 bilinmeyen sabitlerine göre bir Lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Bu homojen denklem sisteminin katsayıları (7) determinantındaki değerlerdir. Homojen Lineer cebirsel denklem sisteminin aşikar olmayan bir çözümünün var olması için gerek ve yeter koşul katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması olduğundan ispat cebirsel denklem sistemleri teorisine göre tamamlanmış olur.

Teorem 2 : Homojen olmayan sınır değer probleminin tek bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul homojen sınır değer probleminin sadece aşikar çözüme sahip olmasıdır.

Homojen sınır değer probleminden daha genel ama daha ilginç olan sınır değer problemi, diferansiyel denklemin katsayıları olan $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının x bağımsız değişkeninin yanı sıra keyfi bir λ parametresine de bağlı olduğu homojen sınır değer problemidir.

$$y'' + P(x,\lambda)\,y' + Q(x,\lambda)\,y = 0 \quad , \quad a<x<b \qquad (8)$$

$$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 \qquad (9)$$

$$a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \qquad (10)$$

Böyle bir problemin sadece λ parametresinin bazı değerleri için aşikâr olmayan çözümleri vardır. Böyle λ'ların ve bu λ'lara karşılık gelen aşikar olmayan çözümlerinin bulunması problemine özdeğer problemi denir. λ'lara problemin özdeğerleri ve λ'lara karşılık gelen aşikâr olmayan çözümlere problemin özfonksiyonları adı verilir.

(2) ve (3) koşulları, lineerlik açısından çok geneldir. Uygulamada bu sınır koşullarının özel halleri olan;

Ayrılabilir Sınır koşulları

$$a_{11} y(a) + a_{12} y'(a) = \gamma_1$$
$$b_{21} y(b) + b_{22} y'(b) = \gamma_2$$

Dirichlet Sınır Koşulları

$$y(a) = \gamma_1$$
$$y(b) = \gamma_2$$

Neumann Sınır Koşulları

$$y'(a) = \gamma_1$$
$$y'(b) = \gamma_2$$

Periyodik Sınır koşulları

$$y(-T) = y(T) \qquad y(0) = y(2T)$$
veya
$$y'(-T) = y'(T) \qquad y'(0) = y'(2T)$$

koşulları göz önüne alınır.

1) Ör/ $y'' - y' - 2y = 0$

$y(0) = 0 \quad y'(1) = 0$

K.D: $r^2 - r - 2 = 0$

$(r-2)(r+1) = 0$

$r_1 = 2 \quad r_2 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \\ y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} \end{array}$$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$

$y'(1) = 0 \Rightarrow 2c_1 e^2 - c_2 e^{-1} = 0$

$-2c_2 e^2 - c_2 e^{-1} = 0$

$$-c_2 \underbrace{\left[2e^2 - \frac{1}{e}\right]}_{\neq 0} = 0$$

$c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Ö/ $\left.\begin{array}{l} y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(2) + 2y'(2) = 0 \end{array}\right\}$ sınır değer problemini çözünüz.

$$\text{K.D}: \quad r^2 - 4\lambda r + 4\lambda^2 = 0$$

$$(r - 2\lambda)^2 = 0$$

$$r_{1,2} = 2\lambda$$

$$y = c_1 e^{2\lambda x} + c_2 x \cdot e^{2\lambda x}$$

$$y' = 2\lambda c_1 e^{2\lambda x} + c_2 e^{2\lambda x} + 2\lambda c_2 x e^{2\lambda x}$$

$$y'(1) = 0 \Rightarrow 2\lambda c_1 e^{2\lambda} + c_2 e^{2\lambda} + 2\lambda c_2 e^{2\lambda} = 0$$

$$2\lambda c_1 e^{2\lambda} + (1 + 2\lambda) c_2 e^{2\lambda} = 0$$

$$y(2) = c_1 e^{4\lambda} + 2 c_2 e^{4\lambda}$$

$$y'(2) = 2\lambda c_1 e^{4\lambda} + (1 + 4\lambda) c_2 e^{4\lambda}$$

$$y^2 + 2y'(2) = 0 \Rightarrow c_1 e^{4\lambda} + 2 c_2 e^{4\lambda} + 2\left[2\lambda c_1 e^{4\lambda} + (1 + 4\lambda) c_2 e^{4\lambda}\right] = 0$$

$$\Rightarrow (1 + 4\lambda) c_1 e^{4\lambda} + (4 + 8\lambda) c_2 e^{4\lambda} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda c_1 e^{2\lambda} + (1 + 2\lambda) c_2 e^{2\lambda} = 0 \\ (1 + 4\lambda) c_1 e^{4\lambda} + (4 + 8\lambda) c_2 e^{4\lambda} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2\lambda c_1 + (1 + 2\lambda) c_2 = 0 \\ (1 + 4\lambda) c_1 + (4 + 8\lambda) c_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 + 4\lambda & 4 + 8\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8\lambda + 16\lambda^2 - (1 + 6\lambda + 8\lambda^2) = 0$$

$$8\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} 4\lambda & -1 \\ 2\lambda & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (4\lambda - 1)(2\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}, \quad \lambda = \frac{-1}{2}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) c_1 + \left(1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) c_2 = 0$$

$$\left[1+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right] c_1 + \left(4+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) c_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -c_1 &= 0 \\ -c_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= k \end{aligned}\right\} \quad \boxed{y_1 = kxe^{-x}}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right) c_1 + \left(1+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\right) c_2 &= 0 \\ \left[1+4\left(\frac{1}{4}\right)\right] c_1 + \left[4+8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\right] c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{c_1}{2} + \frac{3}{2} c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} c_1 = -3c_2$$

$$c_2 = k \Rightarrow \quad c_1 = -3k$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \quad y_2 = -3k e^{\frac{x}{2}} + kxe^{\frac{x}{2}} = k(x-3)e^{\frac{x}{2}}$$