

ÖRNEKLER

1) $f(x) = x^n$, ($n \in \mathbb{N}$) olmak üzere fonksiyonun k . mertebe türevini bulunuz.

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k} \quad (k \leq n)$$

$k > n \Rightarrow$ türev sıfır olur.

2) $y = \frac{1}{1+x}$ fonksiyonunun n . mertebe türevini bulunuz.

$$y = (1+x)^{-1}$$

$$y' = -(1+x)^{-2}$$

$$y'' = 2(1+x)^{-3}$$

$$y''' = (-3) \cdot 2(1+x)^{-4}$$

$$y^{(4)} = 4 \cdot 3 \cdot 2(1+x)^{-5}$$

⋮

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! (1+x)^{-(n+1)} \quad (n \geq 0)$$

3) $f(x) = \sin(ax+b)$ olmak üzere $f^{(n)}(x)$ türevi için formül bulunuz.

$$f'(x) = a \cdot \cos(ax+b)$$

$$f''(x) = -a^2 \sin(ax+b)$$

$$f'''(x) = -a^3 \cos(ax+b)$$

$$f^{(4)}(x) = a^4 \sin(ax+b)$$

:

$$\left. \begin{aligned} f^{(2n+1)} &= (-1)^n \cdot a^{2n+1} \cos(ax+b) \\ f^{(2n)} &= (-1)^n a^{2n} \sin(ax+b) \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 0)$$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ olmak üzere $f^{(4)}$ ü tahmin edebilir miyiz?

$$f(x) = (x^2+1)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{-1/2} \\ &= x \cdot (x^2+1)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = (x^2+1)^{-1/2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{-3/2} \cdot 2x$$

$$f''(x) = (x^2+1)^{-1/2} - x^2 (x^2+1)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot 2x(x^2+1)^{-3/2} - 2x(x^2+1)^{-3/2} + \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{-5/2} \\
 &= -x \cdot (x^2+1)^{-3/2} - 2x(x^2+1)^{-3/2} + 3x^3(x^2+1)^{-5/2} \\
 &= -3x(x^2+1)^{-3/2} + 3x^3(x^2+1)^{-5/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{(4)}(x) &= -3(x^2+1)^{-3/2} + \frac{9}{2}x \cdot 2x(x^2+1)^{-5/2} + 9x^2(x^2+1)^{-5/2} - \frac{15}{2}x^3 \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{-7/2} \\
 &= -3(x^2+1)^{-3/2} + 18x^2(x^2+1)^{-5/2} - 15x^4(x^2+1)^{-7/2}
 \end{aligned}$$

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

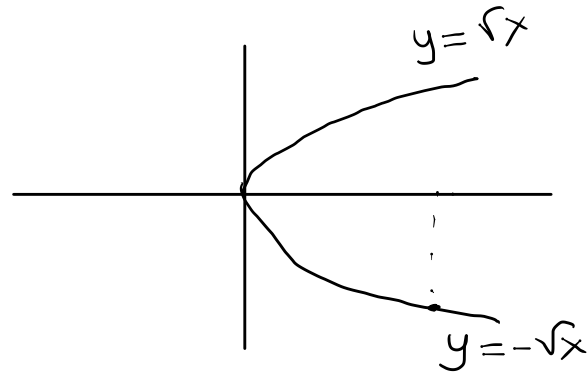
$F(x,y)=0$ denkleminde değişkenlerden herhangi biri diğer cinsinden tek türlü olarak belirlenemiyorsa denkleme kapalı formdaki denklem denir.

Bazı durumlarda $F(x,y)=0$ denklemini y için çözebilir ve bu denklemler tanımlanmış bir veya daha fazla $y=f(x)$ fonksiyonu için açık bir formül bulabiliriz. Bununla beraber, genelde böyle bir denklemi çözemeyiz.

Buna karşın, denklemi y için çözmeden y 'yi sanki x 'in bir fonksiyonuymuş gibi kapalı olarak gözönüne alabiliriz.

fonksiyonunmuş gibi kapalı olarak göz önüne alabiliriz. ve $\frac{dy}{dx}$ türevini bu kapalı fonksiyonlar cinsinden bulabiliriz.

Ör/ $F(x,y) = y^2 - x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(9,-3)} = ?$



1.yol $y^2 - x = 0 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y = \pm \sqrt{x}$
 $y' = \pm \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y' \Big|_{(9,-3)} = -\frac{1}{6}$$

2.yol $y^2 - x = 0$
 $2yy' - 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y} \Rightarrow y' \Big|_{(9,-3)} = -\frac{1}{6}$

~~ör~~ $y \sin x = x^3 + \cos y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$
 $F(x,y) = y \sin x - x^3 - \cos y = 0$

$$y' \sin x + y \cos x = 3x^2 - y' \sin y$$

$$y' [\sin x + \sin y] = 3x^2 - y \cos x$$

$$y' = \frac{3x^2 - y \cos x}{\sin x + \sin y}$$

$$F(x,y) = 0$$

$$y' = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{y \cos x - 3x^2}{\sin x + \sin y}$$

~~ör~~ $x^2 + xy + 2y^3 = 4$ eğrisine $(-2, 1)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Teğet doğ. denk: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$2x + y + xy' + 6y^2 y' = 0$$

$$y'(x + 6y^2) = -(2x + y)$$

$$y' = - \frac{(2x + y)}{x + 6y^2}$$

$$y' \Big|_{(-2,1)} = - \frac{(-4+1)}{-2+6} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}(x+2) + 1 \Rightarrow \boxed{4y - 3x = 7}$$

~~Ör~~

$$xy + y^2 = 2x \quad \text{olmak üzere} \quad y'' = ? \quad F(x, y) = 0$$

$$xy + y^2 - 2x = 0$$

$$y + xy' + 2yy' - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' = 0$$

$$y'(x + 2y) = 2 - y$$

$$2y' + 2(y')^2 + y''(x + 2y) = 0$$

$$y' = \frac{2 - y}{x + 2y}$$

$$y'' = - \frac{[2y' + 2(y')^2]}{x + 2y}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'' &= - \frac{2 \left[\frac{2-y}{x+2y} \right] + 2 \left[\frac{2-y}{x+2y} \right]^2}{x+2y} = -2 \cdot \frac{(2-y)(x+2y) + (2-y)^2}{(x+2y)^3} \\ &= -2 \frac{(2-y) [x+2y + (2-y)]}{(x+2y)^3} \\ &= -2 \frac{(2-y)(x+2+y)}{(x+2y)^3} \end{aligned}$$

Ters Fonksiyonların Türevi

Bir f fonksiyonunun bir (a,b) aralığında türevelere sahip ve $a < x < b$ için $f'(x) > 0$ veya $f'(x) < 0$ olduğunu kabul edelim.

Teorem: (Artan-Azalan fonksiyonlar)

I bir açık aralık, J ise I 'nin tüm noktalarını içeren

(muhtemelen her iki uç noktasını da içeren) bir kapalı aralık olsun f fonksiyonu I aralığında sürekli ve J aralığında türetilebilir olmak üzere $\forall x \in I$ için

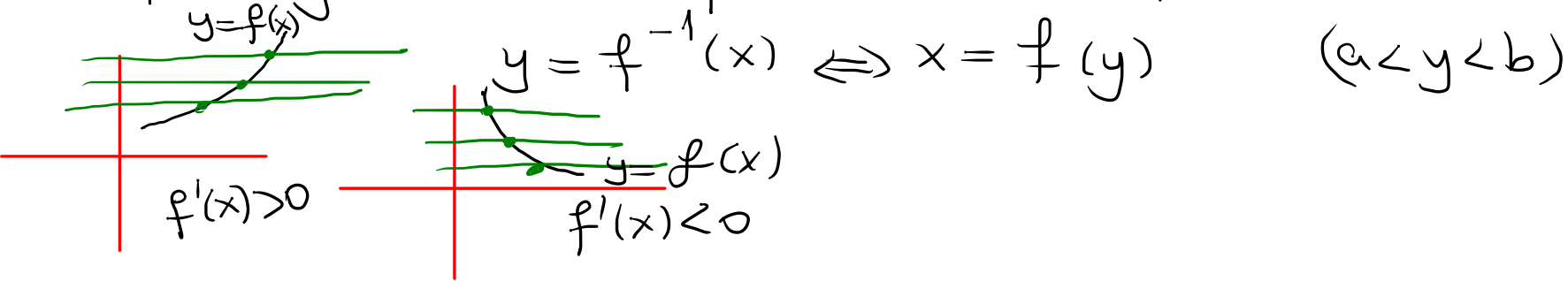
1°) $f'(x) < 0 \Rightarrow f, I$ üzerinde kesin azalandır. (artmıyandır)

2°) $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f, I$ üzerinde azalandır.

3°) $f'(x) > 0 \Rightarrow f, I$ üzerinde kesin artandır. (azalmıyandır)

4°) $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f, I$ üzerinde artandır.

Bu durumda (a,b) üzerindeki farklı noktalar için fonksiyon farklı değerler alır. Dolayısıyla 1-1'dir ve tersi vardır.



$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \quad (a < y < b)$$

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$ buradan kapalı türev alalım;

$$1 = y' \cdot f'(y)$$

$$y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$\frac{d}{dx} [f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x = \frac{1}{\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=f^{-1}(x)}}$$

← $f^{-1}(x)$ 'in
tanımı

kümesinde

⁴
~~Or~~ $f(x) = x^3 + x$ fonksiyonunun 1-1 olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(10)$ * hesaplayınız.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

$$y = x^3 + x$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$x=10 \Rightarrow 10 = x^3 + x \Rightarrow x = 2$$

$$y' = 3x^2 + 1$$

$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$(f^{-1})'(\underset{10}{x}) = \frac{1}{f'[\underbrace{f^{-1}(x)}_2]} = \frac{1}{(3x^2+1)_{x=2}} = \frac{1}{13} //$$

Ör $f(x) = 1 + 2x^3 \Rightarrow [f^{-1}(x)]' = ?$
 $f'(x) = 6x^2$

$f(x) = 1 + 2x^3 \quad y = 1 + 2x^3$
 $\Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{1/3}$

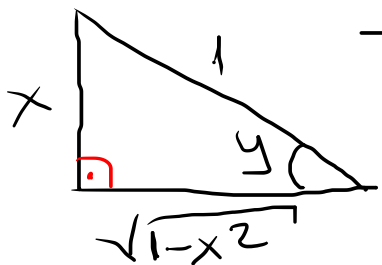
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{6 \cdot \left[\frac{x-1}{2}\right]^{2/3}}$$

Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri

1. $y = \arcsin x \quad D(f): [-1, 1] \quad \bullet$

$R(f): \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \bullet$

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \Rightarrow 1 = y' \cdot \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$\bullet \quad y = \arcsin x \Rightarrow \sin(\arcsin x) = x \quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
 $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$\bullet \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x$

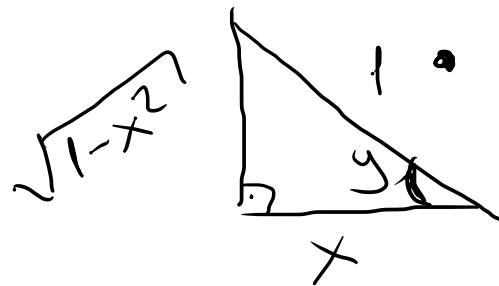
2. $y = \arccos x$ $D(f): [-1, 1]$

$R(f): [0, \pi]$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \Rightarrow 1 = -y' \cdot \sin y \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

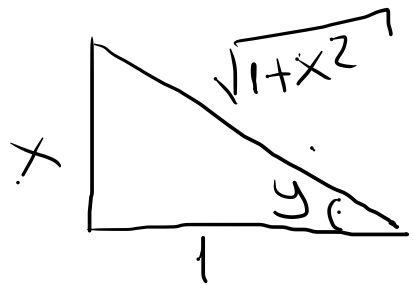
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$



3. $y = \arctan x$ $D(f): \mathbb{R}$

$R(f): (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow 1 = y' \cdot (1 + \tan^2 y) \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$



$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\arctan x) = x$$

- $\arctan(-x) = -\arctan x$

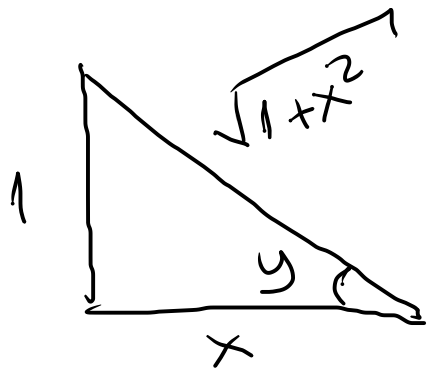
4. $y = \operatorname{arccot} x$

$D(f) : \mathbb{R} \cdot$

$R(f) : (0, \pi) \cdot$

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y \Rightarrow 1 = -y' \cdot \csc^2 y \Rightarrow y' = \frac{-1}{\csc^2 y}$$

$$1 = -y'(1 + \cot^2 y) \Rightarrow y' = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}$$



$$\sin(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{x}$$

$$\cot(\operatorname{arccot} x) = x$$

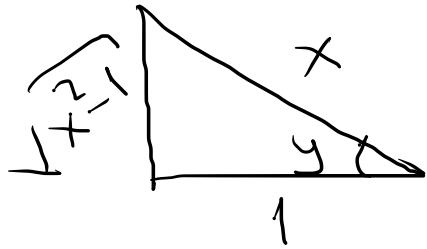
$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

5. $y = \operatorname{arcsec} x$ $D(f): (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

$R(f): [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow x = \sec y \Rightarrow 1 = y' \cdot \sec y \cdot \tan y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (|x| > 1)$$



$\sin(\operatorname{arcsec} x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$, $\cos(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x}$, $\tan(\operatorname{arcsec} x) = \sqrt{x^2 - 1}$

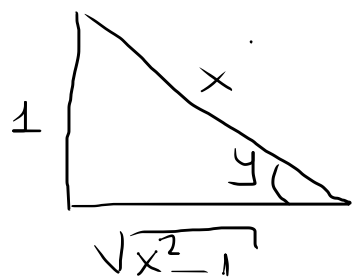
$$\sec(\operatorname{arcsec} x) = x$$

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

6. $y = \operatorname{arccsc} x$

- $D(f): (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- $R(f): [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

$$y = \operatorname{arccsc} x \Leftrightarrow x = \csc y \Rightarrow 1 = -y' \csc y \cot y \Rightarrow y' = \frac{-1}{\csc y \cdot \cot y} = \frac{-1}{|x| \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \quad |x| > 1$$



- $\sin(\operatorname{arccsc} x) = \frac{1}{x}$, $\cos(\operatorname{arccsc} x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$
 $\tan(\operatorname{arccsc} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\csc(\operatorname{arccsc} x) = x$

- $\operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x$

$$\operatorname{arccsc} x = \arcsin \frac{1}{x}$$

$u = u(x)$ olmak üzere

1. $y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, 2. $y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

3. $y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$, 4. $y = \operatorname{arccot} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

$$5. y = \operatorname{arcsec} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} \quad (|u| > 1)$$

$$6. y = \operatorname{arccsc} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u| \cdot \sqrt{u^2 - 1}} \quad (|u| > 1)$$

Ör/ $x > -1$ için $\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$ olduğunu gösteriniz.

$$\underbrace{\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \arctan x}_{f(x)} = -\frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{(x+1)^2 + (x-1)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{2}{2x^2 + 2} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow f'(x) \equiv 0$$

$f(x) \rightarrow$ sbt fonk.

$$x > -1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \arctan x \Big|_{x=0} = f(0)$$

$$f(0) = \arctan(-1) - \cancel{\arctan 0}^{x=0} = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

ör/ $y = \sin^{-1}(\sin x)$

$$= \arcsin(\sin x) \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = 1$$

ör/ $x \neq 2$ olm. üzere

$$\arctan \sqrt{1+x^2} - \arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

özdeşliği doğrulayan x değerini bulunuz

$$\arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) = \arctan \sqrt{1+x^2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \left[\arcsin \left(\frac{1}{x-2} \right) \right] = \sin \left[\arctan \sqrt{1+x^2} - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\frac{1}{x-2} = \sin(\arctan \sqrt{1+x^2}) \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos(\arctan \sqrt{1+x^2}) \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{x-2} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \Rightarrow -\sqrt{2+x^2} = x-2$$

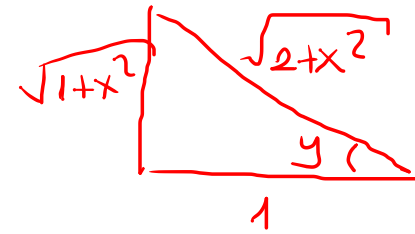
$$2+x^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$-4x = -2$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$y = \arctan \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \tan y = \sqrt{1+x^2}$$



Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Türetileri

Üstel fonk: $a > 0, a \neq 1$ olm. üzere $y = a^x$ şeklindeki fonk.

$D(f): \mathbb{R}, R(f): (0, \infty), 0 < a < 1$ için azalan, $a > 1$ için artan fonk.

$$y = a^x$$

$$\bullet a^{x+h} = a^x \cdot a^h \quad \bullet (a^x)^h = a^{x \cdot h} \quad \bullet a^{x-h} = \frac{a^x}{a^h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x [a^h - 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \frac{1}{h}}{\log_a \left(1 + \frac{1}{h}\right)}$$

$$a^h - 1 = \frac{1}{n}$$

$$a^h = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\log_a a^h = \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$h \cdot \log_a a = \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$h = \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$h \rightarrow 0 \quad h \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$u = u(x) \Rightarrow y = a^u \Rightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

$$\log_a b = \frac{\log c^a}{\log c^b}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^x}{n \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^x}{\log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a^x}{\log_a e}$$

$$= a^x \cdot \ln a$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = e^u \Rightarrow y' = u' \cdot e^u$$

Logaritma fonk.:

$a > 0, a \neq 1$ olm. üzere $y = \log_a x$ şeklindeki fonk.

$$D(f): \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \quad R(f): \mathbb{R}$$

$0 < a < 1$ için azalan. $a > 1$ için artan.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\begin{aligned} h &\rightarrow 0 \\ \frac{x}{h} &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{h} \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (\frac{x}{h} \rightarrow \infty)}} \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \\ &= \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \Rightarrow 1 = y' \cdot a^y \cdot \ln a \Rightarrow y' = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$u = u(x) \Rightarrow y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

ÖRNEKLER

$$1) y = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) \Rightarrow y' = \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)'}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$2) y = \ln |\cos x| \Rightarrow y' = \frac{(|\cos x|)'}{|\cos x|} = \frac{-\sin x \cdot \frac{|\cos x|}{\cos x}}{|\cos x|} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$3) y = e^{x^2-3x} \Rightarrow y' = (x^2-3x)' \cdot e^{x^2-3x} = (2x-3) \cdot e^{x^2-3x}$$

$$4) y = \sqrt{1+e^{2x}} \Rightarrow y' = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$5) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow y' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

6) $f(x) = x^\pi - \pi^x$ fonksiyonunun $x = \pi$ 'de negatif eğime sahip

olduğunu gösteriniz.

$$f'(x) = \pi x^{\pi-1} - \pi^x \cdot \ln \pi$$

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= \pi \cdot \pi^{\pi-1} - \pi^\pi \cdot \ln \pi \\ &= \pi^\pi [1 - \ln \pi] < 0 \end{aligned}$$

$$\pi^\pi > 0$$

$$1 - \ln \pi < 0$$

$$e < \pi$$

$$\ln e < \ln \pi \Rightarrow 1 < \ln \pi \Rightarrow 1 - \ln \pi < 0 \quad \checkmark$$

Logaritmik Türetme

$f(x) > 0$ olmak üzere $y = [f(x)]^{g(x)}$ fonksiyonun türevini bulalım.

$$y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln \{ [f(x)]^{g(x)} \} \Rightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln [f(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln [f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln [f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

~~or~~ $y = x^x \quad (x > 0)$

$$\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^x [\ln x + 1]$$

NOT
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = ?$
 $y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
 $\ln y = \ln [\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x]$
 Logaritmik türetme ile çözülür.

~~or~~ $y = (\sin x)^{\ln x} \quad (0 < x < \pi) \Rightarrow y' = ?$

$$\ln y = \ln [(\sin x)^{\ln x}]$$

$$\ln y = \ln x \cdot \ln \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \cdot \ln \sin x + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow y' = [\sin x]^{\ln x} \left[\frac{\ln \sin x}{x} + \ln x \cot x \right]$$

Ör

$$y = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4} \Rightarrow y' = ?$$

$$\ln y = \ln \left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4} \right] \Rightarrow \ln y = \ln(x+1) + \ln(x+2) + \ln(x+3) - \ln(x+4)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \Rightarrow y' = \left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4} \right] \cdot \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right]$$

Ör

$$y = \sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = ?$$

$$y = [(x+1)(x^2+1)(x^3+1)]^{1/2} \Rightarrow \ln y = \ln [(x+1)(x^2+1)(x^3+1)]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln [(x+1)(x^2+1)(x^3+1)]$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} [\ln(x+1) + \ln(x^2+1) + \ln(x^3+1)]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x^2}{x^3+1} \right]$$

$$y' = \frac{\sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}}{2} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x^2}{x^3+1} \right]$$

$$y' \Big|_{x=1} = \frac{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2}}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \right] = \sqrt{2} \frac{6}{2} = 3\sqrt{2}$$

Teorem : $x > 0$ ise $\ln x \leq x-1$ old. gösteriniz.
 $\ln x - (x-1) \leq 0$

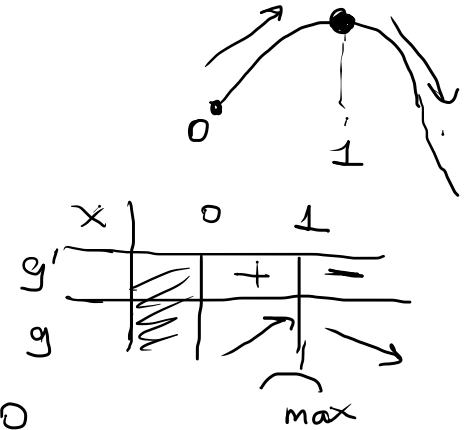
İspat : $x > 0$ için $g(x) = \ln x - (x-1)$ olsun.

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0	1
1-x	+	-
x	-	+
$\frac{1-x}{x}$	-	+

x	0	1
g'	+	-

$$g(1) = \ln 1 - (1-1) = 0$$



$$\forall x > 0 \text{ için } g(x) \leq g(1) = 0$$

$$\ln x - (x-1) \leq 0 \Rightarrow \ln x \leq x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a \cdot e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln t)^a}{e^{\ln t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln t)^a}{t}$$

$$\begin{aligned} x &= \ln t \\ x \rightarrow \infty & \\ t &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln t}{t^{1/a}} \right)^a = 0^a = 0$$