Örnekler $\quad n \in \mathbb{Z}^+$

1) $\{a_n\} = \left\{\frac{\cos n}{n}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

$$-1 \le \cos n \le 1$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n} \\ \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sandaviç teo. göre } \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

2) $\{a_n\} = \left\{\sqrt{n^2+2n} - n\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2n} + n\right)}{\sqrt{n^2+2n} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} + 2n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left[\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

3) $\{a_n\} = \{\ln(2n+3) - \ln n\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\ln(2n+3) - \ln n\right]$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(\frac{2n+3}{n}\right)\right]$$

$$= \ln\left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n}\right)\right]$$

$$= \ln 2$$

4) $\{a_n\} = \{e^n \arcsin(e^{-n})\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[e^n \arcsin(e^{-n})\right]$$

$$\overset{0.\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(e^{-n})}{e^{-n}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sin t} = 1$$

$\arcsin(e^{-n}) = t$

$e^{-n} = \sin t$

$n \to \infty \quad t \to 0^+$

5) $\{a_n\} = \{(2^n + 5^n)^{1/n}\}$

1. yol

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[(2^n+5^n)^{1/n}\right]$$

$$\overset{\infty^0}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\left(5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right]\right)^{1/n}\right]$$

$$= 5 \lim_{n\to\infty} \left\{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right]^{1/n}\right\}$$

$$= 5$$

2. yol

$$y = \lim_{n\to\infty} \left\{(2^n+5^n)^{1/n}\right\}$$

$$\ln y = \ln\left[\lim_{n\to\infty} (2^n+5^n)^{1/n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\ln (2^n+5^n)^{1/n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \ln(2^n+5^n)\right]$$

$$\overset{0.\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n+5^n)}{n}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n \cdot \ln 2 + 5^n \cdot \ln 5}{2^n + 5^n}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln 2 + 5^n \ln 5}{2^n + 5^n}$$

?

Teorem: Bir $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ise sınırlıdır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Ör/ $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ dizisi alttan -1, üstten ise 1 ile sınırlıdır. Fakat dizinin limiti mevcut olmadığından dizi ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty} [(-1)^n] \begin{cases} n \text{ çift} \Rightarrow 1 \\ n \text{ tek} \Rightarrow -1 \end{cases} \neq \text{ limit yoktur.}$$

Teorem: Bir $\{a_n\}$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı ise (veya monoton azalan ve alttan sınırlı ise) yakınsaktır.

Ör/ Ardışık olarak $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{a_n}{2}$ ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

$a_1 = 1 < \frac{3}{2}$ $\quad a_2 = \frac{3}{4} + \frac{a_1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ $\quad a_3 = \frac{3}{4} + \frac{a_2}{2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} < \frac{3}{2}$ $\quad a_4 = \frac{3}{4} + \frac{a_3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{11}{16} = \frac{23}{16} < \frac{3}{2}$

Not: (Tümevarım Yöntemi)

$P(n)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

1. $P(n)$'in $n=1$ için doğru olduğu gösterilir.
2. $P(n)$'in $n=k$ için doğru olduğu kabul edilir.
3. $P(n)$'in $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterebiliyorsak $P(n)$ olayı tüm $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur denir.

- $n=1 \Rightarrow a_1 = 1 < \frac{3}{2}$'dir.
- $n=k \Rightarrow a_k < \frac{3}{2}$ kabul edelim.
- $n=k+1 \Rightarrow a_{k+1} = \frac{3}{4} + \frac{a_k}{2} < \frac{3}{4} + \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow a_{k+1} < \frac{3}{2}$

O halde $\{a_n\}$ dizisinin üst sınırı $\frac{3}{2}$'dir.

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n \overset{?}{>} 0$

$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{4} + \frac{a_n}{2} - a_n = \frac{3}{4} - \frac{a_n}{2} = \frac{3-2a_n}{4} > 0$ $\quad a_n < \frac{3}{2}$ olduğundan $3 - 2a_n > 0$'dır.

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\}$ dizisi artan bir dizidir. O halde $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlı ve monoton artan olduğundan yakınsaktır.

$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$

$a_1 = 1 < 3$

$a_2 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} < 3$

$a_3 = \sqrt{6+\sqrt{7}} < 3$

$a_4 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7}}} < 3$

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1 < 3$

$n = k \Rightarrow a_k < 3$

$n = k+1 \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6+3} = 3 \Rightarrow a_{k+1} < 3$

Bazı önemli limitler

1. Eğer $x>0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$

2. Eğer $|x|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n} = 0$

3. Her $\alpha>0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} = 0$

4. Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n}}{n!} = 0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

7. Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$

8. $a>1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n}}{n} = \infty$

   $a>1$ ve $p\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n}}{n^{p}} = \infty$

Ör/ $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1^{\infty}$$

$$y = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \Rightarrow \ln y = \ln\left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\cancel{-1/n^2}}{1+1/n}}{\cancel{-1/n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

$\Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e$

Ör/ $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{1+n^2}{2+n^2} \right)^n \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1+n^2}{2+n^2} \right)^n \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1+n^2+1-1}{2+n^2} \right)^n \right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-n}{2+n^2} \right) = 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{2+n^2-1}{2+n^2} \right]^n \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2+n^2} \right)^n \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2+n^2} \right)^{n \left[\frac{-(2+n^2)}{-(2+n^2)} \right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{-(2+n^2)} \right)^{-(2+n^2)}}_{e} \right]^{\frac{-n}{2+n^2}} \right\}$$

$$= e^0 = 1$$