İkinci Mertebeden Lineer Denklemlerin Seri Çözümleri

Katsayıları bağımsız değişkene bağlı olarak

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0 \qquad (1)$$

şeklinde verilen ikinci mertebeden lineer denklemlerin çözümleri genelde elemanter yöntemler kullanılarak bulunamaz. Bu tür denklemlerin bazıları değişken dönüşümü ile sabit katsayılı denklemlere dönüştürülerek çözülebilir.

Ör/ $a(x-x_0)^2 y'' + b(x-x_0)y' + cy = 0$ $\quad a,b,c \to$ sbt. $\quad x-x_0 = e^t$ dönüşümüyle sabit katsayılı dif. denkleme dönüşür. (Cauchy - Euler)

Fakat, uygun dönüşümün bulunması ve dönüşüme bağlı olarak diferansiyel denklemin çözümünü bulmak belli denklemler dışında imkansız gibidir. Böyle durumlarda diferansiyel denklemin çözümleri, belli bir tanım bölgesinde yakınsak, sonsuz seriler şeklinde aranır.

(1)'e örnekler ;

- Bessel Denklemi ; $x^2y'' + xy' + (x^2-\lambda^2)y = 0 \qquad \lambda \to$ sbt
- Legendre Denklemi ; $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \qquad \lambda \to$ sbt
- Airy Denklemi ; $y'' - \lambda x y = 0 \qquad \lambda \to$ sbt

- Hermite Denklemi; $y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad n \in \mathbb{Z}$

- Chebyshev Denklemi; $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \quad n \in \mathbb{Z}$

Kuvvet Serileri

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde sonsuz terimli bir seriye x'e (x'in kuvvetlerine) göre kuvvet serisi denir.

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (2)$$

(2) serisi (1) serisinin daha genel halidir. ($(x-x_0) = t$ dönüşümü ile (2), (1)'e dönüşür)

Tanım: Eğer bir kuvvet serisinin kısmi toplamlar dizisinin limiti mevcut ise kuvvet serisine x noktasında yakınsak denir. Aksi taktirde de seri ıraksaktır.

Tanım: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n|$ kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak ise o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi mutlak yakınsaktır denir.

Bir kuvvet serisinin yakınsaklığı bağımsız değişkenin (x'in) alacağı değerlere bağlı olduğundan kuvvet serisinin bu x değerleri ile yakınsaklık aralığı belirlenir. Kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı Oran testinin kuvvet serisine aşağıdaki gibi uygulanması ile bulunur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n (x-x_0)^n}_{u_n} \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$$ için kuvvet serisi yakınsaktır.

$n < n+1$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

NOT: Alt. seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . a_n$$

Alt. seri Testi

1°) $a_n > a_{n+1}$ 2°) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow$ Alt seri yak.

Ör: $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}}_{u_n}$$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n} \\ u_{n+1} &= \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x-2)}^{n+1}}{(n+1) \cdot \cancel{3}^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{(x-2)^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(x-2)}{3} \right|$$

$$= \left| \frac{x-2}{3} \right| < 1$$

$$|x-2| < \underbrace{3}_{R} \Rightarrow -3 < x-2 < 3$$

$$-1 \leq x < 5$$

$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Alt. Harm. Seri (şartlı yak.)

$x=5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksak.

Yak. Aralığı : $[-1, 5)$

Tanım: $R \geq 0$ olmak üzere, eğer bir kuvvet serisi $|x-x_0|<R$ için mutlak yakınsak ve $|x-x_0|>R$ için ıraksak ise R sayısına yakınsaklık yarıçapı denir. Ayrıca $x_0-R<x<x_0+R$ aralığı da serinin yakınsaklık aralığı olarak adlandırılır. Eğer yakınsaklık aralığı sadece $x=x_0$ noktasından oluşuyorsa R yakınsaklık yarıçapı sıfır, eğer kuvvet serisi her x değeri için yakınsak ise R yakınsaklık yarıçapı ∞-dur.

Lemma 1: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ kuvvet serileri ortak bir aralıkta yakınsak ise;

- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

- $$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right](x-x_0)^n$$

dir.

Lemma 2:

Eğer $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi, bir açık (a,b) aralığında yakınsak ise bu aralıkta $f(x)$'in türevleri;

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n.a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n (x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$\vdots$

şeklinde bulunur.

NOT: $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a r^n$ Geo. seri

Eğer yak ise $|r|<1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f(x)}$

$|x|<1$ için yak.

Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=x_0$ noktasında

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

şeklinde yazılabiliyorsa o zaman bu seriye $f(x)$'in $x=x_0$ noktasındaki Taylor serisi denir.

$x_0=0 \Rightarrow$ (Mclaurin serisi denir)

Tanım : Eğer $f(x)$ fonksiyonu $|x-x_0|<R$ için (R yakınsaklık yarıçapı), $x=x_0$ noktası civarında Taylor serisine açılabiliyorsa $f(x)$ fonksiyonuna $x=x_0$ noktasında analitiktir denir.

Tanım : Eğer $\forall x$ için

- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \Rightarrow a_n = b_n \text{ 'dir.} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0 \text{ 'dır.}$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\cdot 3^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!\, 3^i}$$

- $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n!\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+4)!\, 3^{n+4}}$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+3)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{n-3}}{n!}$$

Adi Nokta, Tekil Nokta Tanımları

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0 \quad \left(\text{veya } P(x) \neq 0 \text{ olmak üzere } y'' + \underbrace{\frac{Q(x)}{P(x)}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{R(x)}{P(x)}}_{q(x)} y = 0 \right)$$

şeklindeki diferansiyel denklem için

($P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonlarının polinom ve ortak bölenlerinin olmadığı durum gözönüne alınırsa)

- **Adi Nokta:** Eğer bir x_0 noktası için $P(x_0) \neq 0$ ise x_0 noktasına adi nokta denir.

Tekil Nokta: Eğer bir x_0 noktası için $P(x_0) = 0$ ise x_0 noktasına tekil nokta denir.

(Eğer $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları analitik ise, verilen tanımlar genişletilmek zorundadır)

Adi Nokta: Eğer $p(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ ve $q(x) = \dfrac{R(x)}{P(x)}$ fonksiyonları bir x_0 noktasında analitik ise, yani $p(x)$ ve $q(x)$'e karşı

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n \qquad (p_i \to \text{sbt} \quad i = 0,1,\dots,n,\dots)$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n \qquad (q_i \to \text{sbt} \quad i = 0,1,\dots,n,\dots)$$

Taylor serileri karşı geliyorsa x_0 noktasına denklemin adi noktasıdır denir.

Tekil Nokta: Aksi durumda x_0 noktasına tekil nokta denir.