Kuvvet Serileri (Değişik Terimli Seriler)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ şeklindeki serilere kuvvet serisi

denir. İlk seri x'in kuvvetlerinin bir serisi veya sıfır civarında bir kuvvet serisi olarak adlandırılır. İkinci seri ise $(x-c)$'nin kuvvetlerinin serisi veya $x=c$ civarında bir kuvvet serisi olarak adlandırılır. Burada a_n lere kuvvet serisinin katsayıları denir. Kuvvet serisinin terimleri bir x değişkeninin fonksiyonu olduğundan seriler x'in her bir değeri için yakınsayabilir veya yakınsamayabilir. Serinin yakınsak olduğu x değerleri için toplam x'e bağlı bir fonksiyon tanımlar.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\dots$$

$|x|<1$ için

$\boxed{c = \text{yakınsaklık merkezi}}$

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi için aşağıdakilerden biri sağlanır.

$R =$ yakınsaklık yarıçapı

1) Seri sadece $x=c$'de yakınsaktır.

2) Seri $\forall x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

3) Seri $|x-c|<R$ eşitsizliğini sağlayan her x'te yakınsak ve $|x-c|>R$ eşitsizliğini sağlayan her x'te ıraksak olacak şekilde pozitif bir reel R sayısı vardır. Bu durumda seri her bir $x=c-R$ ve $x=c+R$ uç noktalarında yakınsayabilir veya yakınsamayabilir.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right|$$

* Oran testi kullanılarak serinin mutlak yakınsadığı aralık bulunur.

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{r}|x-c|$$

$$= r\cdot|x-c| < 1$$

$$\Rightarrow |x-c| < \frac{1}{r} = R \longrightarrow \text{yakınsaklık yarıçapı}$$

$$-\frac{1}{r} < x-c < \frac{1}{r} \Rightarrow \underbrace{c-\frac{1}{r} < x < c+\frac{1}{r}}_{\text{yakınsaklık aralığı}}$$

Ör → $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n\cdot 2^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{(x-5)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2(n+1)}\right|\cdot|x-5|$$

$$= \frac{1}{2}|x-5| < 1$$

$$|x-5| < 2$$

$$-2 < x-5 < 2$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$3 \le x \le 7$

$x=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-5)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ → alternatif ıraksak seri

↳ şartlı yakınsaktır

$x=5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-5)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{2^n}}{n \cdot \cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → harmonik seri

↳ ıraksaktır

→ seri $(3,7)$ aralığında mutlak yakınsak

→ Seri $x=3$'te şartlı yakınsak

→ Seri $x<3$ ve $x \geq 7$ için ıraksaktır.

ör ⇒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right|$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right|}_{0} |x|$$

$= 0 \cdot |x| < 1$ → x'in tüm değerleri için yakınsaktır

Yakınsaklık yarıçapı ∞'dur.

ör ⇒ $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \, x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |n+1| \, |x|$$

$= \infty \cdot |x|$ → yakınsaklık yarıçapı 0'dır.

→ seri sadece $x=0$'da yakınsaktır.

ÖDEV $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}$

Yakınsaklık merkezi, yakınsaklık yarıçapı ve yakınsaklık aralığını bulun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}$$

yakınsaklık merkezi $= -\frac{5}{2}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}\cdot\frac{3^{n+1}\cdot\left[(n+1)^2+1\right]}{2^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{2}\cdot\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\right|$$

$= \frac{3}{2} \to$ yakınsaklık yarıçapı

$$\left|x+\frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < x+\frac{5}{2} < \frac{3}{2}$$

$$-4 < x < -1$$

$x=-4$ için; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[2\cdot(-4)+5]^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot \cancel{3^n}}{(n^2+1)\cdot\cancel{3^n}}$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1} \to$ alternatif seri

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ p-serisi

$p=2>1 \to$ yakınsaktır.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2+1}{1/n^2} = 1 \neq 0,\infty$ Her iki seri aynı karakterdedir

Sonsuz bir seriye sonlu sayıda terim eklemek serinin karakterini değiştirmez. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ serisi yakınsaktır

$x=-1$ için; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2.(-1)+5]^n}{(n^2+1)\,3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{(n^2+1).\cancel{3^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yakınsaktır

Yakınsaklık aralığı: $[-2,-1]$

Ör ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2 3^n}}_{u_n} (x+2)^n$ yakınsaklık aralığını bulun?

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^{n+1}}{(n+1)^2\, 3^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot 3^n}{(-1)^n \cdot (x+2)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{1}{3} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot (x+2) \right| = \frac{1}{3}|x+2| < 1$$

(D'Alembert oran testine göre)

$\frac{1}{3}|x+2| < 1$

$|x+2| < 3$

$-3 < x+2 < 3$

$-5 \leq x \leq 1$

$x=-5$ için; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-5+2)^n}{n^2\, 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \cancel{3^n}}{n^2 \cdot \cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p-serisi $p=2>1$ yakınsaktır

$x=1$ için; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (1+2)^n}{n^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{3^n}}{n^2 \cdot \cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ → alternatif seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ yakınsaktır

⇓

Alternatif seri, Mutlak yakınsak.

ÖR $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerlerini ve yakınsaklık aralığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+3}}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \left| \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}} \right|$$

$$= |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

aralığında seri mutlak yakınsaktır.

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ Alterne seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ile mukayese edelim.
(Harmonik seri ıraksak)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = 1 \neq 0, \infty$$

olduğundan her iki seri aynı karakterdedir. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ serisi de ıraksaktır. Alterne seri testine göre;

$1^\circ)\ a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$ $\quad \forall n$ için $\quad n < n+1$

$$\Rightarrow n < n+1$$
$$\Rightarrow n^2 < (n+1)^2$$
$$\Rightarrow n^2+3 < (n+1)^2+3$$
$$\Rightarrow \sqrt{n^2+3} < \sqrt{(n+1)^2+3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \checkmark$$

$2^\circ)\ \lim_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} = 0 \checkmark$

$\Rightarrow$ Altern seri yakınsaktır. Mutlak değerlerden oluşan seri ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ şartlı yakınsaktır.

$x=1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ bulunur ki ıraksaktır.

O halde verilen kuvvet seri $(-1,1)$ aralığında mutlak yakınsak, $x=-1$'de şartlı yakınsak ve $x \geq 1$ için ıraksaktır. Kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $[-1,1)$'dir.

Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler

Cebirsel işlemleri göstermek için yakınsaklık merkezi "0" olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisini göz önüne alalım. Verilecek herhangi bir özellik, $x = y-c$ dönüşümü yapılarak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-c)^n$ şeklindeki serilere genişletilebilir.

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri sırasıyla R_a ve R_b yakınsaklık yarıçapına sahip iki seri ve c bir sabit olsun. O zaman;

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n$ serisinin yakınsaklı yarıçapı yine R_a'dır ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin yakınsadığı her yerde $\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı toplamda bulunan serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğünden daha küçük olamaz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \to R \geq \min(R_a, R_b)$$

ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serilerinin yakınsadığı her yerde;

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serilerinin Cauchy çarpımı

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} x + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{c_2} x^2 + \dots$$

$C_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ şeklindedir.

ÖR ⇒ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+ - - - = \frac{1}{1-x}$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1+x+x^2+x^3+ - - -)(1+x+x^2+x^3+ - - -)$$

$$= 1+2x+3x^2+4x^3 - -$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1$$

Çarpım serisinin yakınsaklık yarıçapı toplamda olduğu gibidir. Yani çarpımın yakınsaklık yarıçapı en azından çarpımdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğüne eşittir

4) Bölüm serisinin katsayılarını belirlemek için basit bir kural yoktur R_a ve R_b sırasıyla pay ve paydadaki serilerin yakınsaklık yarıçapları ve R_c yakınsaklık merkezinden paydadaki serinin toplamının "0" olduğu en yakın kompleks sayıya olan uzaklık olmak üzere bölüm serisinin yakınsaklık yarıçapı R_a, R_b ve R_c sayılarının en küçüğünden daha küçük olamaz

$$R \geq \min\{R_a, R_b, R_c\}$$

ÖR ⇒

$$\begin{matrix} R_a \to \infty \leftarrow \\ R_b \to \infty \leftarrow \end{matrix} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{x=1} = \frac{1+0.x+0.x^2+ - - -}{1+(-1).x+0.x^2+ - - -} = 1+x+x^2+x^3+ - - - = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

yakınsaklık merkezi = 0

$|x| < 1$

$R = 1$

$$R \geq \min\{\infty, \infty, 1\}$$

$$\boxed{R = 1}$$

* Bir kuvvet serisi yakınsadığı aralıkta bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlar

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \qquad (-1<x<1)$$

İSPAT: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ serisi $a=1$, $r=x$ olan bir geometrik seri olarak düşünülürse $|x|<1$ için yakınsaktır ve serinin toplamı $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$'e yakınsar. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \qquad -1<x<1 \text{ dir.}$$

Teorem: Eğer, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x|<R$ için mutlak yakınsak ise, o zaman her sürekli $f(x)$ fonksiyonu için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n [f(x)]^n$ serisi de $|f(x)|<R$ için yakınsar.

ÖR ⇒ $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta yakınsadığı fonksiyonu bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n$ olarak alırsak

x yerine $4x^2$ gibi gelmiş olur. O zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n = \underbrace{\frac{1}{1-4x^2}}_{\text{yakınsadığı fonk.}} \qquad |4x^2|<1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}}_{\text{yakınsaklık aralığı}}$$

olur.

Kuvvet Serilerinin Türetilmesi ve İntegre Edilmesi

Eğer bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı pozitif ise seri terim terim türetilebilir ve integre edilebilir.

Teorem: $R>0$ olmak üzere eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $(-R,R)$ aralığında $f(x)$ toplamına yakınsıyorsa yani $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = f(x)$ ise;

1) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığı üzerinde türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n x^{n-1}$$

2) $f(x)$ $(-R,R)$ aralığının her kapalı alt aralığında integre edilebilirdir ve her $x \in (-R,R)$ için

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

NOT Teoreme göre terim terim türetilmiş ya da integre edilmiş serilerin yakınsaklık yarıçapları verilen serilerle aynı olacaktır.

Türetilmiş serinin yakınsaklık aralığı orjinal seri kendi yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsıyorsa bile muhtemelen bu uç noktalardan biri veya her ikisi dışında orjinal serinin yakınsaklık aralığı ile aynıdır.

İntegre edilmiş seri verilen serinin yakınsaklık aralığının her yerinde ve muhtemelen orjinal seri uç noktalarda yakınsamasa bile bu aralığın uç noktalarının biri veya her ikisinde de yakınsaktır.

ÖR ⇒ $\frac{1}{(1-x)^2}$ ve $\frac{1}{(1-x)^3}$ fonksiyonlarının kuvvet seri temsillerini bulunuz ve geçerli oldukları aralıkları belirleyiniz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan türev alırsak;

$$\frac{0.(1-x)-(-1).1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1+2x+3x^2+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad (-1<x<1) \text{ 'dir.}$$

Buradan tekrar türev alırsak;

$$\frac{0.(1-x)^2-2.(-1).(1-x)}{(1-x)^4} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = 2+2.3.x+\cdots$$

$$(-1<x<1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \qquad (-1<x<1)$$

bulunur.

Ör → $\ln(1+x)$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

yakınsaklık aralığı = $|x|<1$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\dots)\,dt \Rightarrow \ln|1+t|\Big|_0^x = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots\Big|_0^x$$

$$\ln|1+x| - \cancel{\ln 1} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

$\ln 1 = 0$

$$\Rightarrow \ln|1+x| = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

> yakınsaklık yarıçapı değişmez

$|x|<1$

$-1<x\leq 1$

$x=-1$ için; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}$ → ıraksak

$x=1$ için; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ → alternatif seri → şartlı yakınsak

ÖDEV

arctan x → kuvvet serisi olarak ifade et

$\frac{1}{1+x^2}$ → integre ederek bul, yakınsaklık aralığını bul.

ÖDEV

$x+4x^2+9x^3+16x^4+\dots$ kuvvet serisinin toplamını bulunuz ve bu toplamdan yararlanarak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

ÖR ⇒ $\arctan x$

$$\frac{1}{1+x^2} = (\arctan x)'$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1-t^2+t^4-t^6+\dots)\,dt$$

$$\arctan t \Big|_0^x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \Big|_0^x$$

$$\arctan x - \arctan 0 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

ÖR ⇒ $x+4x^2+9x^3+16x^4+\dots$ kuvvet serisinin toplamını bulunuz ve bu toplamdan yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisinin yakınsaklık değerini bulunuz.

$$x+4x^2+9x^3+16x^4+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$$

$$\frac{(1-x)^2+2(1-x)\cdot x}{(1-x)^4} = 1+4x+9x^2+16x^3+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1+4x+9x^2+16x^3+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = x+4x^2+9x^3+16x^4+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \qquad -1<x<1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6 \qquad \left(x=\frac{1}{2} \in (-1,1)\right)$$

ÖR $\Rightarrow$ $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ fonksiyonunun $(x-1)$'in kuvvetlerine göre olan bir seri temsilini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$x-1=t$ dersek $x=t+1$ olur.

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{3+t}=\frac{1}{3(1+\frac{t}{3})}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{t}{3}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+\dots=\frac{1}{1+x}\qquad(-1<x<1)$$

olduğundan

$$\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=1-\frac{t}{3}+\left(\frac{t}{3}\right)^2-\left(\frac{t}{3}\right)^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-t}{3}\right)^n \text{ olur.}$$

O halde $\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{1+\frac{t}{3}}\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^n}{3^{n+1}}$ $\quad -1<\dfrac{t}{3}<1$

$\Rightarrow -3<t<3$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x-1)^n}{3^{n+1}}\qquad -3<x-1<3\Rightarrow -2<x<4$$

bulunur.

ÖR ⇒

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$$ serisinin karakterini belirleyiniz.

1. YOL Oran testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2\, 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot 2^n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{2n+3}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$ olduğundan yakınsaktır.

2. YOL Limit mukayese uygulayalım.

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$ geometrik serisini seçelim.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ $r = \frac{1}{2}$, $|r| < 1$ yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n} \cdot 2^n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2}$$

$$= 0$$

$L = 0$ ve $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan

verilen seri yakınsaktır.

ÖR ⇒ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1+\ln n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{n} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

olduğundan oran testine göre yakınsaktır.

ÖR ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{25n^2+5n-6}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2+5n-6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-2)(5k+3)}$$

$$\frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \frac{A}{(5k-2)} + \frac{B}{(5k+3)}$$

$$A = \lim_{k\to\frac{2}{5}} \cancel{(5k-2)} \cdot \frac{1}{\cancel{(5k-2)}(5k+3)} = \lim_{k\to\frac{2}{5}} \frac{1}{5k+3} = \frac{1}{5}$$

$$B = \lim_{k\to-\frac{3}{5}} \cancel{(5k+3)} \frac{1}{(5k-2)\cancel{(5k+3)}} = \lim_{k\to-\frac{3}{5}} \frac{1}{5k-2} = \frac{-1}{5}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5k-2} - \frac{1}{5k+3}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{13}-\frac{1}{18}\right) + \dots + \left(\frac{1}{5(n-1)-2} - \frac{1}{5(n-1)+3}\right) + \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{13}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{13}}-\cancel{\frac{1}{18}}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\cancel{\frac{1}{5n-7}}-\cancel{\frac{1}{5n-2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5n-2}}-\frac{1}{5n+3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5n+3}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5n+3}\right) = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{25n^2+5n-6} = \frac{1}{15}$$

ÖR $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.q^n$ $\quad(|q|<1)$ serisinin toplamını bulunuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k = q+2q^2+3q^3+\cdots+nq^n$$

$$\Rightarrow qS_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{k+1} = q^2+2q^3+3q^4+\cdots+(n-1)q^n+nq^{n+1}$$

$$S_n - qS_n = \underbrace{q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^n}_{\text{Geometrik seri}} - nq^{n+1} \qquad a=r,\ r=q$$

$$\Rightarrow (1-q)S_n = \frac{q(1-q^n)}{1-q} - nq^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} = 0 \quad |q|<1 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n\to\infty} n.q^{n+1} \overset{0.\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^{-(n+1)}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-(n+1)\,q^{-(n+2)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-q^{n+2}}{n+1}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2} \text{ olur. O halde}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \text{'dir.}$$

ÖR $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{5^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{5^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k}$$

$$= 2.\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k.\left(\frac{1}{5}\right)^k}_{\text{Bir önceki soru}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k}}_{\text{geometrik seri}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 2.\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}.\frac{25}{16} + \frac{1}{5}.\frac{5}{4}$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{8}$$

ÖR $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

1. yol: (Limit mukayese)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik serisini seçelim ıraksak bir seridir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}} \cdot n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{\sqrt[3]{n^3\left(2+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(n+2)}{\cancel{n}\sqrt[3]{2+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}} = \infty$$

$L=\infty$ ve $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}}$ serisi de ıraksaktır.

2. yol: (n. terim testi)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt[3]{n^3\left(2+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\cancel{\frac{2}{n}}^{0}\right)}{\cancel{n}\sqrt[3]{2+\cancel{\frac{5}{n^2}}^{0}-\cancel{\frac{3}{n^3}}^{0}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

ÖR ⇒ Genel terimi $a_n = \dfrac{(n!)^2}{3^{n^2}}$ serisinin karakterini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1).n!]^2 . 3^{n^2}}{3^{n^2+2n+1} . (n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 . \cancel{(n!)^2} . \cancel{3^{n^2}}}{\cancel{3^{n^2}} . 3^{2n+1} . \cancel{(n!)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{2n+1}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \underset{\text{(L'Hospital)}}{} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2}(n+1)}{\cancel{2} . 3^{2n+1} . \ln 3}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 . 3^{2n+1} . (\ln 3)^2} = 0 < 1$$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

ÖR ⇒ Genel terimi $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$ olan serinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\frac{n^{3/2}}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+2}} \right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{n}+2+1}{\sqrt{n}+2}} \right)^{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)} \right)^{\sqrt{n}+2-2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)^{\sqrt{n}+2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}+2}} \right)^{-2} \right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{n}+2=t \\ n\to\infty \quad t\to\infty \end{array}\right\} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}} \right)^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 1$$

$= \frac{1}{e} < 1$ ise seri Cauchy testine göre yakınsaktır.

ÖR $\Rightarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ serisinin karakterini inceleyiniz. $(p>0)$

İntegral testini uygulayalım.

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

$f(n)$ fonksiyonu $[2,\infty)$ aralığında sürekli ve pozitiftir.

$$f'(n) = -\frac{\left[(\ln n)^p + n \cdot p(\ln n)^{p-1} \cdot \frac{1}{n}\right]}{n^2(\ln n)^{2p}}$$

$$\Rightarrow f'(n) = -\frac{\left[(\ln n)^p + p(\ln n)^{p-1}\right]}{n^2(\ln n)^{2p}}$$

$$= -\frac{(\ln n)^p\left[1 + \frac{p}{\ln n}\right]}{n^2(\ln n)^{2p}}$$

$$= -\frac{1 + \frac{p}{\ln n}}{n^2(\ln n)^p} = -\frac{\ln n + p}{n^2(\ln n)^{p+1}} < 0$$

azalan fonk. O halde int. testi uygulanabilir.

$$\int_2^\infty f(n)\,dn = \int_2^\infty \frac{1}{n(\ln n)^p}\,dn$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_2^k \frac{1}{n(\ln n)^p}\,dn$$

$$\left.\begin{aligned} &\ln n = u \\ &\frac{dn}{n} = du \\ &n=2 \Rightarrow u=\ln 2 \\ &n=k \Rightarrow u=\ln k \end{aligned}\right\} \Rightarrow = \lim_{k\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln k} \frac{du}{u^p}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left.\frac{u^{-p+1}}{-p+1}\right|_{\ln 2}^{\ln k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(\ln k)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1} & p>1 \text{ ise yak.} \\ +\infty & p\le 1 \text{ ise ırak.} \end{cases}$$

ÖR ⇒ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2-1}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Alterne seridir. Mutlak değerlerden oluşan seriye bakalım;

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n^2-1} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$$

Bu pozitif terimli serinin karakterini inceleyelim;

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik serisi ile karşılaştıralım.

$$a_n = \frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n \quad (\forall n \text{ için})$$

$\sum a_n$ serisinin her terimi $\sum b_n$ serisinde karşılığı olan her terimden daha büyük ve $\sum b_n$ serisi ıraksak olduğundan $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

Alterne seri testini uygularsak;

1°) $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2-1} = \frac{n+1}{n^2+2n} = \frac{n+1}{n(n+2)}$$

$$a_n = \frac{n}{n^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n(n+2)} \cdot \frac{(n^2-1)}{n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+2n^2}$$

$$= 1 - \frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2} < 1$$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$ ✓

2°) $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2-1} = 0 \checkmark$$

O halde Alterne seri yakınsaktır. Mutlak değerlerden oluşan seri ıraksak olduğundan Alterne seri şartlı yakınsaktır.