3. Özdeğer ve Özfonksiyonların Asimptotik Davranışları

- $\ell(y) = -y'' + q(x)\,y(x) = \lambda y(x)$ (3.1)

$$\left.\begin{aligned} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha &= 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $-\infty < h, H < \infty$ için $\cot\alpha = -h$, $\cot\beta = H$ alınırsa sınır koşulları

- $$\left.\begin{aligned} y'(0) - h\,y(0) &= 0 \\ y'(\pi) + H\,y(\pi) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

şeklini alır.

- $\varphi(x,\lambda)$ ile (3.1) denkleminin $\varphi(0,\lambda) = 1$, $\varphi'(0,\lambda) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü
- $\psi(x,\lambda)$ ile de (3.1) denkleminin $\psi(0,\lambda) = 0$, $\psi'(0,\lambda) = 1$ koşullarını sağlayan çözümünü gösterelim.

Teorem 3.1

$\lambda = s^2$ olsun. O taktirde

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \psi(\tau,\lambda)\, d\tau$$

dur.

İSPAT: $\varphi(x,\lambda)$ çözüm ise (3.1) denklemini sağlamalıdır.

$$\Rightarrow \quad -\varphi''(x,\lambda) + q(x)\,\varphi(x,\lambda) = \lambda\,\varphi(x,\lambda) \Rightarrow q(x)\,\varphi(x,\lambda) = \varphi''(x,\lambda) + \lambda\,\varphi(x,\lambda)$$

$\int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau)\, \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau$ integralini göz önüne alalım.

$$\int_0^x \sin s(x-\tau)\left[\varphi''(\tau,\lambda) + \lambda\varphi(\tau,\lambda)\right] d\tau = \underbrace{\int_0^x \sin s(x-\tau)\, \varphi''(\tau,\lambda)\, d\tau} + \lambda \int_0^x \sin s(x-\tau)\, \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau \qquad (3.4)$$

$\int_0^x \underbrace{\sin s(x-\tau)}_{u}\, \underbrace{\varphi''(\tau,\lambda)\, d\tau}_{dv}$ integralinde kısmi integrasyon uygulayalım:

$$\left.\begin{aligned} &\sin s(x-z) = u \Rightarrow -s\cos s(x-z)\,dz = du \\ &\varphi''(z,\lambda)\,dz = dv \Rightarrow \varphi'(z,\lambda) = v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi''(z,\lambda)\,dz = \varphi'(z,\lambda)\sin s(x-z)\Big|_0^x + s\int_0^x \cos s(x-z)\,\varphi'(z,\lambda)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi''(z,\lambda)\,dz = \varphi'(x,\lambda)\sin s(\cancelto{0}{x-x}) - \varphi'(0,\lambda)\sin s(x-0) + s\int_0^x \underbrace{\cos s(x-z)}_{u}\,\underbrace{\varphi'(z,\lambda)\,dz}_{dv}$$

$$= -\varphi'(0,\lambda)\sin sx + s\left[\varphi(z,\lambda).\cos s(x-z)\Big|_0^x - s\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos s(x-z) = u \\ &s\sin s(x-z)\,dz = du \\ &\varphi'(z,\lambda)\,dz = dv \\ &\varphi(z,\lambda) = v \end{aligned}\right\}$$

$$= -h\sin sx + s\left[\varphi(x,\lambda)\cos s(x-x) - \varphi(0,\lambda)\cos s(x-0) - s\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz\right]$$

$$= -h\sin sx + s\,\varphi(x,\lambda) - s.\cos sx - s^2\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz$$

Bu sonucu (3.4)'de yerine yazalım.

$$\int_0^x \sin s(x-z)\underbrace{\left[\varphi''(z,\lambda)+\lambda\varphi(z,\lambda)\right]}_{q(z)\varphi(z,\lambda)}dz = \int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi''(z,\lambda)\,dz + \lambda\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz = -h\sin sx + s\varphi(x,\lambda) - s\cos sx - \underbrace{s^2}_{\lambda}\cancel{\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz} + \cancel{\lambda\int_0^x \sin s(x-z)\,\varphi(z,\lambda)\,dz}$$

$$s\varphi(x,\lambda) = \int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau + h \sin sx + s\cos sx$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,\lambda) = \frac{h}{s} \sin sx + \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau \, .$$

$\psi(x,\lambda)$ eğer (3.1) denkleminin çözümü ise ; $\;-\psi''(x,\lambda) + q(x)\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda)$ 'dır.

$$q(x)\psi(x,\lambda) = \psi''(x,\lambda) + \lambda\psi(x,\lambda)$$

$\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \psi(\tau,\lambda)\, d\tau$ integralini gözönüne alalım.

$$\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, \psi(\tau,\lambda)\, d\tau = \int_0^x \sin s(x-\tau) \left[\psi''(\tau,\lambda) + \lambda\psi(\tau,\lambda) \right] d\tau$$

$$= \underbrace{\int_0^x \sin s(x-\tau)\, \psi''(\tau,\lambda)\, d\tau}_{I} + \lambda \int_0^x \sin s(x-\tau)\, \psi(\tau,\lambda)\, d\tau \qquad (3.5)$$

$$I = \int_0^x \underbrace{\sin s(x-\tau)}_{u}\, \underbrace{\psi''(\tau,\lambda)\, d\tau}_{dv}$$

$\sin s(x-\tau) = u \Rightarrow -s\cos s(x-\tau)\, d\tau = du$

$\psi''(\tau,\lambda)\, d\tau = dv \Rightarrow \quad \psi'(\tau,\lambda) = v$

$$I=\int_0^x \underbrace{\sin s(x-z)}_{u}\,\underbrace{\psi''(z,\lambda)\,dz}_{dv} = \psi'(z,\lambda).\sin s(x-z)\Big|_0^x + s\int_0^x \cos s(x-z)\,\psi'(z,\lambda)\,dz$$

$$= \psi'(x,\lambda)\sin s\overbrace{(x-x)}^{0} - \psi'(0,\lambda)\sin s(x-0) + s\left[\psi(z,\lambda).\cos s(x-z)\Big|_0^x - s\int_0^x \sin s(x-z)\psi(z,\lambda)\,dz\right]$$

$\cos s(x-z)=u$

$s\sin s(x-z)\,dz=du$

$\psi'(z,\lambda)\,dz=dv$

$\psi(z,\lambda)=v$

$$= -h\sin sx + s\left[\psi(x,\lambda)\cos s(x-x) - \overbrace{\psi(0,\lambda)}^{0}.\cos s(x-0) - s\int_0^x \sin s(x-z)\psi(z,\lambda)\,dz\right]$$

$$= -h\sin sx + s\,\psi(x,\lambda) - s^2\int_0^x \sin s(x-z)\,\psi(z,\lambda)\,dz$$

Bu sonucu (3.5)'de yerine yazarsak;

$$\int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\psi(z,\lambda)\,dz = -\sin sx + s\,\psi(x,\lambda) - \cancel{\underbrace{s^2}_{\lambda}\int_0^x \sin s(x-z)\,\psi(z,\lambda)\,dz} + \cancel{\lambda\int_0^x \sin s(x-z)\psi(z,\lambda)\,dz}$$

$$s\,\psi(x,\lambda) = \sin sx + \int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\psi(z,\lambda)\,dz$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-z)\,q(z)\,\psi(z,\lambda)\,dz \;.$$

Teorem 3.2

$s=\sigma+it$ $(\sigma,t\in\mathbb{R})$ olsun. $|s|\geq s_0$ ve $x\in[0,\pi]$ için

$$\varphi(x,\lambda)=O\left(e^{|t|x}\right),\quad \varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right)$$

$$\psi(x,\lambda)=O\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right),\quad \psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(|s|^{-2}e^{|t|x}\right)$$

olacak şekilde bir $s_0>0$ vardır. Bu formüller $|s|\geq s_0$ ve $x\in[0,\pi]$ için

- $|\varphi(x,\lambda)|\leq c.e^{|t|x}$, $\quad$ • $|\varphi(x,\lambda)-\cos sx|\leq c.|s|^{-1}.e^{|t|x}$

$$|\psi(x,\lambda)|\leq c.|s|^{-1}e^{|t|x},\quad \left|\psi(x,\lambda)-\frac{\sin sx}{s}\right|\leq c.|s|^{-2}e^{|t|x}$$

olacak şekilde bir $c>0$ sabitinin varlığıyla eşdeğerdir. Burada $|s|\geq s_0$ için c, x ve λ'dan bağımsız bir sabittir.

İSPAT: $\varphi(x,\lambda)=f(x).e^{|t|x}$ olsun. Teorem 3.1'den

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\,q(\tau)\,\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$\Rightarrow f(x).e^{|t|x}=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\,q(\tau)\,\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

$\max\limits_{[0,\pi]} |f(x)| = \mu$ olsun. $\quad \varphi(x,\lambda) = f(x) \cdot e^{|t|x}$

$\left| e^{-|t|x} \cdot \cos sx \right| \le 1 \qquad \left| e^{-|t|x} \cdot \sin sx \right| \le 1 \qquad \left(\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \,,\; \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \right)$

Bunlardan yararlanarak;

$$f(x) = e^{-|t|x} \cdot \cos sx + \frac{h}{s} e^{-|t|x} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x e^{-|t|x} \cdot \sin s(x-\tau) q(\tau) e^{|t|\tau} \cdot f(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-|t|x} \cos sx + \frac{h}{s} e^{-|t|x} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x e^{-|t|(x-\tau)} \cdot \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

$$|f(x)| \le 1 + \frac{|h|}{|s|} + \frac{1}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)| \cdot |f(\tau)|\, d\tau$$

$$\mu \le 1 + \frac{|h|}{|s|} + \frac{\mu}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)|\, d\tau$$

$$\mu \left[1 - \frac{1}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)|\, d\tau \right] \le 1 + \frac{|h|}{|s|}$$

$$\Rightarrow \mu \le 2\left(1 + \frac{|h|}{|s|}\right) \le 2(1+|h|)$$

$$|s| \ge s_0 = 2 \int_0^\pi |q(\tau)|\, d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{|s|}{2} \ge \int_0^\pi |q(\tau)|\, d\tau.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)|\, d\tau$$

$$\Rightarrow \mu - \frac{\mu}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)|\, d\tau \le \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2}$$

$\varphi(x,\lambda) = f(x).e^{|t|x} \Rightarrow |\varphi(x,\lambda)| \leq |f(x)|.|e^{|t|x}| \leq \underbrace{2|1+|h||}_{c}.e^{|t|x} = c.e^{|t|x}$ elde edilir.

Bu kez de $|\varphi(x,\lambda) - \cos sx| \leq c.|s|^{-1}.e^{|t|x}$ i ispatlayalım.

$$|\varphi(x,\lambda) - \cos sx| = \left| \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\,q(\tau).\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau \right|$$

$$\leq \frac{|h|}{|s|}.|\sin sx| + \frac{1}{|s|}\int_0^x |\sin s(x-\tau)|\,|q(\tau)|\,|\varphi(\tau,\lambda)|\,d\tau$$

$$\leq |h|.|s|^{-1}.e^{|t|x} + |s|^{-1}\int_0^x e^{|t|(x-\tau)}.|q(\tau)|.\mu.e^{|t|\tau}\,d\tau$$

$$= |s|^{-1}\,e^{|t|x}\left[\underbrace{|h| + \int_0^x \mu\,|q(\tau)|\,d\tau}_{c_1}\right]$$

$$\Rightarrow |\varphi(x,\lambda) - \cos sx| \leq c_1.|s|^{-1}e^{|t|x}$$

Diğer eşitsizliklerde benzer şekilde ispatlanır.

$$\ell(y) = -y'' + q(x)\,y = \lambda y \quad (3.1)$$

(a) $y'(0) - h\,y(0) = 0$

(b) $y'(\pi) + H\,y(\pi) = 0$ (3.3)

problemini incelemek için

$$\left.\begin{aligned} &y(0)=1, \quad y'(0)=h \\ &y'(\pi)+H\,y(\pi)=0 \end{aligned}\right\} (3.6)$$

olmak üzere (3.1)-(3.6) problemini gözönüne alalım.

(3.1)-(3.3) problemi ile (3.1)-(3.6) problemi arasında aşağıdaki ilişkiler vardır. (özdeğerler ve özfonksiyonlar arasındaki ilişkiler)

I. λ_0, (3.1)-(3.6) probleminin bir özdeğeri, y_0'da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde

$$y_0'(0) - h\,y_0(0) = h - h\cdot 1 = 0 \text{ dır.}$$

Görüldüğü üzere (3.3) a şartı sağlanmıştır. λ_0 (3.1)-(3.3) probleminin de bir özdeğeri ve y_0'da bu özdeğere karşı gelen özfonksiyondur.

II. λ_1, (3.1)-(3.3) probleminin bir özdeğeri; y_1'de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Ayrıca $z_1 = \frac{y_1(x)}{y_1(0)}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada $y_1(0) \neq 0$'dır.

Çünkü, eğer $y_1(0)=0$ olsaydı $y_1'(0) - h\underbrace{y_1(0)}_{=0}=0 \Rightarrow y_1'(0)=0$ olurdu. Bu taktirde y_1

$$\left.\begin{array}{r} -y''+q(x)y=\lambda y \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{array}\right\}$$

Cauchy probleminin çözümü olurdu ki bu bir çelişkidir. Çünkü Cauchy probleminin tek çözümü aşikar çözümdür. Dolayısıyla bu durumda y_1 özfonksiyon olamaz.

z_1, λ_1'e karşı gelen özfonksiyondur. Ayrıca;

$$z_1(0) = \frac{y_1(0)}{y_1(0)} = 1, \qquad z_1' = \frac{y_1'(x)}{y_1(0)} \Rightarrow z_1'(0) = \frac{y_1'(0)}{y_1(0)} = \frac{hy_1(0)}{y_1(0)} = h$$

olur ki; λ_1 (3.1)-(3.6) probleminin bir özdeğeri ve z_1'de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur.

III. λ_2, (3.1)-(3.3) probleminin bir özdeğeri, y_2, y_3 de bu özdeğere karşılık gelen herhangi iki özfonksiyon olsun. λ_2 özdeğeri aynı zamanda (II'den) (3.1)-(3.6) probleminin de bir özdeğeridir ve

$$z_2(x) = \frac{y_2(x)}{y_2(0)}, \quad z_3(x) = \frac{y_3(x)}{y_3(0)}$$

fonksiyonları da bu özdeğere karşı gelen özfonksiyonlardır.

Dolayısıyla;

$$-z_i'' + q(x) z_i = \lambda z_i \qquad (i=2;3)$$

$$z_i(0) = 1 \quad z_i'(0) = h$$

Cauchy probleminin çözümü tek olduğundan $z_2 = z_3$ elde edilir.

$$\frac{y_2(x)}{y_2(0)} = \frac{y_3(x)}{y_3(0)} \Rightarrow y_3(x) = \frac{y_3(0)}{y_2(0)} \cdot y_2(x)$$ dir. Buna göre y_2 ve y_3 özfonksiyonları lineer bağımlıdır. Yani (3.1)-(3.3) probleminin her özdeğerine karşı gelen lineer bağımsız özfonksiyonların sayısı birdir. O halde (3.1)-(3.3) probleminin her özdeğerinin katlılığı tektir.

IV. (I), (II) ve (III)'den görülür ki (3.1)-(3.3) sınır değer problemi yerine (3.1)-(3.6) probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışları incelenebilir.

$\varphi(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h$$

koşullarını sağlayan çözümü olduğundan λ sayısının özdeğer olabilmesi için $\varphi(x,\lambda)$'nın

$$\varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = 0$$

koşulunu da sağlaması gerekir. Eğer $\lambda = s^2$ alırsak ve

$$w(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0$$

dersek

$$w(\lambda) = w(s^2) = w_1(s)$$

olur. Böylece $w_1(s) = 0$ denkleminin köklerinin kareleri (3.1)-(3.6) probleminin özdeğerleri olacaktır. Özdeğerler reel sayı olduğundan kökler ya reel ya da $s = it$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ şeklindedir.