Bir eğri ailesinin diferansiyel denklemi

Aynı ortak özellikleri gösteren eğrilerin oluşturduğu topluluğa eğri ailesi (integral ailesi) denir. Eğri aileleri ifade edilirlerken ailenin özelliğine göre bir ya da daha çok sayıda parametre kullanılır.

- $(x-\underline{\underline{a}})^2+(y-\underline{\underline{b}})^2=r^2$ $\quad F(x,y,a,b)=0$
- $y=\underline{\underline{k}}x^2$ $\quad y=f(x,k)$
- $y-\underline{\underline{a}}x=0$ $\quad f(x,y,a)=0$

Genel olarak; bir eğri ailesi $c_1,c_2,\dots,c_n$ n tane keyfi parametre olmak üzere

$$f(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0 \quad \text{(kapalı form)}$$

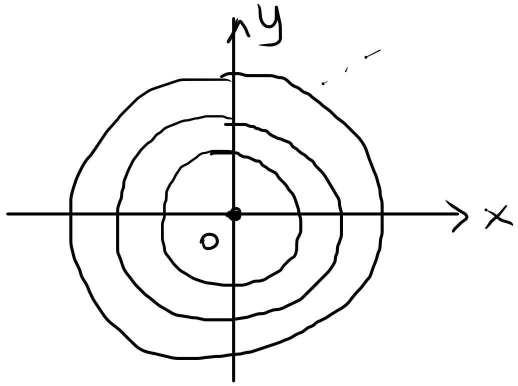
veya

$$y=F(x,c_1,c_2,\dots,c_n) \quad \text{(açık form)}$$

denklemleri n parametreli eğri ailesini temsil eder.

Eğer böyle bir ailenin diferansiyel denklemi oluşturulmak isteniyorsa parametre sayısı kadar (yani n sayıda) türev alınır. Böylece eğri ailesinin denklemi ile birlikte oluşan $n+1$ bağıntı arasında parametreler yok edilirse $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ şeklinde n. mertebeden bir diferansiyel denklem olarak eğri ailesinin dif. denklemi elde edilir.

Ör/1. $x^2+y^2=c^2$ eğri ailesinin dif. denklemini kurunuz.



1 parametreli çember ailesi

x'e göre türetelim;

$$x^2+y^2=c^2 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{2x}{2y} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-x}{y}}$$

$$\boxed{yy'+x=0}$$

Ör/2. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ eğri ailesi veriliyor. Buna ait dif. denklemi kurunuz.

$$\begin{cases} y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x \\ y'=-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x \\ y''=-4c_1\cos 2x-4c_2\sin 2x \end{cases}$$

$$\boxed{y''+4y=0}$$

Ör/3 $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ eğri ailesinin dif. denklemini kurunuz.

$$\begin{cases} y' = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + 3c_3 e^{3x} \\ y'' = c_1 e^{x} + 4c_2 e^{2x} + 9c_3 e^{3x} \\ y''' = c_1 e^{x} + 8c_2 e^{2x} + 27c_3 e^{3x} \end{cases}$$

$$y''' - y'' = 4c_2 e^{2x} + 18 c_3 e^{3x}, \quad y' - y = c_2 e^{2x} + 2c_3 e^{3x}$$

$$y''' - y'' - 4(y' - y) = 10\, c_3 e^{3x} \quad ?$$

NOT : n tane parametrenin n+1 tane bağıntı içerisinde bulunması bağıntılar arasında belirli koşullar sağlandığı taktirde lineer bağımlılık ilişkisi bulunması gerektiğini gösterir.

Bu koşul,

$$\left.\begin{aligned} & y - c_1 e^{x} - c_2 e^{2x} - c_3 e^{3x} = 0 \\ & y' - c_1 e^{x} - 2c_2 e^{2x} - 3c_3 e^{3x} = 0 \\ & y'' - c_1 e^{x} - 4c_2 e^{2x} - 9c_3 e^{3x} = 0 \\ & y''' - c_1 e^{x} - 8c_2 e^{2x} - 27c_3 e^{3x} = 0 \end{aligned}\right\}$$ sisteminin katsayılar determinantının sıfır olmasıdır.

$$\begin{vmatrix} y & -e^{x} & -e^{2x} & -e^{3x} \\ y' & -e^{x} & -2e^{2x} & -3e^{3x} \\ y'' & -e^{x} & -4e^{2x} & -9e^{3x} \\ y''' & -e^{x} & -8e^{2x} & -27e^{3x} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-e^{x})(-e^{2x})(-e^{3x}) \cdot \begin{vmatrix} y & 1 & 1 & 1 \\ y' & 1 & 2 & 3 \\ y'' & 1 & 4 & 9 \\ y''' & 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0}$$

Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümü denilince denklemi özdeş olarak sağlayacak olan fonksiyondan söz ediliyor demektir. Eğer böyle bir fonksiyon varsa ve bu $y = Q(x)$ gibi bir fonksiyon ise $F(x, Q(x), Q'(x), \dots, Q^{(n)}(x)) \equiv 0$ olacaktır. Amacımız bu fonksiyonu bulmaktır. Bu fonksiyonun grafiğine integral eğrisi denir.

$y = Q(x) \Rightarrow$ açık çözüm

$G(x,y) = 0 \Rightarrow$ kapalı çözüm

Diferansiyel denklemin üç tip çözümünden bahsedilir.

1) Genel Çözüm: Diferansiyel denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit bulunduran bir fonksiyon denklemi sağlıyorsa buna dif. denklemin genel çözümü denir. Bu çözüm bir eğri ailesi belirtir.

2) Özel Çözüm: Genel çözümdeki sabitlere özel değerler vermek suretiyle elde edilen çözümlerdir. Başka bir deyişle diferansiyel denklemle birlikte verilen şartlara bağlı olarak bulunacak çözümlerdir.

NOT: Başlangıç değer ve sınır değer problemleri (Denklemin mertebesi kadar şart olmalı)

- Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine Başlangıç Değer Problemi denir. (Initial Value Problem)

Ör/ $y''+2y=e^x \quad y(\pi)=1, \quad y'(\pi)=2$

=

- Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine Sınır Değer Problemi denir. (Boundary Value Problem)

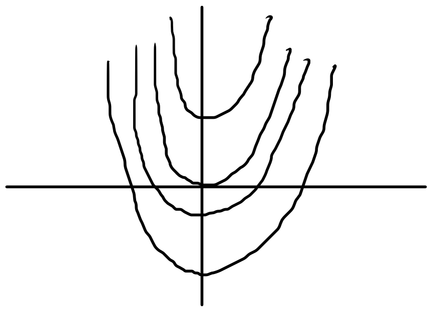
Ör/ $y''+4y=0 \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\neq$

3°) **Tekil Çözüm:** Diferansiyel denklemi sağladığı halde genel çözümden elde edilmesi mümkün olmayan çözümlere tekil çözüm (singüler çözüm) denir.

(Tekil çözüm eğrilerinin grafiği, genel çözüm eğrilerinin zarfıdır. Yani tekil çözüm eğrileri genel çözüm eğrilerinin herbirine teğet olan eğri ya da eğri ailesidir)

Ör/ $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = 2x\,dx \Rightarrow \int dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \underbrace{y = x^2 + c}_{\text{Genel çözüm}} \rightarrow$ parabol ailesi



$c = 0 \Rightarrow y = x^2 \rightarrow$ özel çözüm.

Ör/ $y = xy' + y' - y'^2$ (Clairaut dif. denk)

$y = xc + c - c^2 \rightarrow$ Genel çözüm

$y = \frac{(x+1)^2}{4} \rightarrow$ tekil çözüm.

$c = 1 \Rightarrow y = x \rightarrow$ özel çözüm

Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Genel olarak birinci mertebeden diferansiyel denklemler

ya $F(x,y,y')=0$ formunda,

ya $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ formunda

ya da $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ formunda ifade edilirler.

Birinci mertebeden dif. denklemlerin genel çözümü de ya $y=\varphi(x,c)$ ya da $G(x,y,c)=0$ şeklinde bulunur. Ve bu çözümler bir parametreli eğri ailelerini gösterir.

Birinci mertebeden dif. denklemlerin çözümü için genel bir kural yoktur. Özel kurallar vardır.