$y'' + [\lambda - q(x)]\, y(x) = 0 \quad (4.1)$ $\qquad u(0,\lambda) = \sin\alpha, \quad u'(0,\lambda) = -\cos\alpha$

$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \quad (4.2)$ $\qquad v(\pi,\lambda) = \sin\beta, \quad v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$

$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \quad (4.3)$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ (4.1)-(4.3) probleminin özdeğerleri ve $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), \dots$ fonksiyonları da sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsunlar.

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) \cdot v_n(t)}{\lambda_n} \qquad (4.13)$$

serisini gözönüne alalım. Özdeğer ve özfonksiyonlar için ispatladığımız asimptotik formüllerden

$$(4.14) \quad \left| \frac{v_n(x) \cdot v_n(t)}{\lambda_n} \right| < c \cdot n^{-2}$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı olduğu gösterilebilir. $|v_n(x)| < c$, $\frac{1}{|\lambda_n|} < c \cdot n^{-2}$

($v_n(x)$'in tanım kümesi $[0,\pi] \Rightarrow H(x,t)$'nin tanım kümesi $[0,\pi] \times [0,\pi]$)

(4.14) eşitsizliğine göre $\sum \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan (4.13) serisinin düzgün yakınsak olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $H(x,t)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.

($f(x) = \sum a_n$ olm. üzere $\sum a_n$ yak ve a_n'ler sürekli ise $f(x)$ de süreklidir)

$$(4.15) \quad Q(x,t) = G(x,t) + H(x,t) = G(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)\, v_n(t)}{\lambda_n}$$

fonksiyonu $[0,\pi] \times [0,\pi]$'de sürekli bir fonk.dur.

Teorem 4.5 $Q(x,t)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır. Yani $Q(x,t) \equiv 0$ 'dır.

İspat: (4.1)-(4.3) problemi

$$y(x) + \lambda \int_0^{\pi} G(x,t)\, y(t)\, dt = 0$$

integral denklemine denk olduğundan

$$V_n(x) + \lambda_n \int_0^{\pi} G(x,t)\, V_n(t)\, dt = 0$$

olur. O zaman

$$\lambda_n \int_0^{\pi} G(x,t)\, V_n(t)\, dt = -V_n(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} G(x,t)\, V_n(t)\, dt = \frac{-V_n(x)}{\lambda_n} \qquad (4.16)$$

bulunur. (4.15) ve (4.16)'dan yararlanarak;

$$Q(x,t) = G(x,t) + H(x,t) \longrightarrow \text{(simetrik)}$$

$$\int_0^{\pi} Q(x,t) \cdot V_n(t)\, dt = \int_0^{\pi} \left[G(x,t) + H(x,t) \right] \cdot V_n(t)\, dt$$

$$= -\frac{V_n(x)}{\lambda_n} + \int_0^{\pi} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{V_i(x) \cdot V_i(t)}{\lambda_i} \right] \cdot V_n(t)\, dt$$

$$\int_0^{\pi} Q(x,t)\cdot V_n(t)\,dt = \int_0^{\pi}\left[G(x,t)+H(x,t)\right]\cdot V_n(t)\,dt$$

$$= -\frac{V_n(x)}{\lambda_n} + \int_0^{\pi}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{V_i(x)\cdot V_i(t)}{\lambda_i}\right]\cdot V_n(t)\,dt$$

$$= -\frac{V_n(x)}{\lambda_n} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{V_i(x)}{\lambda_i}\int_0^{\pi} V_i(t)\cdot V_n(t)\,dt$$

$$= -\frac{V_n(x)}{\lambda_n} + \frac{V_n(x)}{\lambda_n} = 0 \qquad (4.17)$$

$$\left(\begin{array}{l} i\neq n \Rightarrow \int_0^{\pi} V_i\cdot V_n = 0 \\ i=n \Rightarrow \int_0^{\pi} V_i\cdot V_n = 1 \end{array}\right)$$

μ bir parametre olmak üzere

$$u(x)+\mu\int_0^{\pi} Q(x,t)\,u(t)\,dt = 0 \qquad (4.18)$$

integral denklemini gözönüne alalım. Bu integral denklemin $\mu=\mu_0$ sabit sayısı ve $u=u_0$ sürekli fonksiyonu için sağlandığını varsayalım. Yani

$$u_0(x)+\mu_0\int_0^{\pi} Q(x,t)\,u_0(t)\,dt = 0 \qquad (4.19)$$

Buradan

$$0=\int_0^{\pi}\left[u_0(x)+\mu_0\int_0^{\pi} Q(x,t)\,u_0(t)\,dt\right]\cdot V_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} u_0(x)\cdot V_n(x)\,dx + \mu_0\int_0^{\pi} V_n(x)\left[\int_0^{\pi} Q(x,t)\,u_0(t)\,dt\right]dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} u_0(x)\,V_n(x)\,dx + \mu_0\int_0^{\pi} u_0(t)\left[\underbrace{\int_0^{\pi} Q(x,t)\,V_n(x)\,dx}_{=0\ (4.17\text{ den})}\right]dt = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} u_0(x)\cdot V_n(x)\,dx = 0 \quad (n=1,2,\dots)$$

$$(4.20)$$

$$u_0(x) + \mu_0 \int_0^{\pi} Q(x,t)\, u_0(t)\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_0(x) + \mu_0 \int_0^{\pi} \left[G(x,t) + H(x,t)\right] \cdot u_0(t)\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_0(x) + \mu_0 \int_0^{\pi} G(x,t)\, u_0(t)\, dt + \mu_0 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x) V_n(t)}{\lambda_n}\right] u_0(t)\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_0(x) + \mu_0 \int_0^{\pi} G(x,t)\, u_0(t)\, dt + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x)}{\lambda_n} \underbrace{\int_0^{\pi} V_n(t)\, u_0(t)\, dt}_{=0 \text{ (4.20'den)}}$$

$$\Rightarrow \quad u_0(x) + \mu_0 \int_0^{\pi} G(x,t)\, u_0(t)\, dt = 0$$

olur. O halde μ_0 (4.1)-(4.3) probleminin bir özdeğeri $u_0(x)$'de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur. Diğer yandan (4.20) den u_0 fonksiyonu her özfonksiyona ortogonaldir. Dolayısıyla kendisine de ortogonaldir. Yani

$$\int_0^{\pi} u_0^2\, dx = 0$$

olmalıdır. $u_0^2(x) \geq 0$ ve $u_0(x)$'in sürekli olduğu gözönüne alınırsa $u_0(x) \equiv 0$ olduğu elde edilir.

$$u(x) + \mu \int_0^{\pi} Q(x,t)\, u(t)\, dt = 0$$

int. denklemini sağlayan bir $\mu = \mu_0$ sayısının ve sıfırdan farklı bir $u = u_0$ sürekli fonksiyonunun var olmadığını göstermiş olduk. Buna göre integral denklemler teorisinden $Q(x,t) \equiv 0$ olmalıdır.

Bu durumda Teorem 4.5'den

$$G(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)\, v_n(t)}{\lambda_n} \qquad (4.21)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.6 : $[0,\pi]$'de tanımlı ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olan ve (4.2)-(4.3) koşullarını sağlayan her $f(x)$ fonksiyonu (4.1)-(4.3) probleminin ortonormal özfonksiyonlarına göre mutlak ve düzgün yakınsak Fourier seri açılımı şeklinde gösterilebilir. Yani

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot v_n(x) \qquad a_n = \int_0^{\pi} f(x) . v_n(x)\, dx \quad \text{dir.}$$

İSPAT : $f''(x) - q(x) f(x) = h(x)$ olsun. ($h \to$ sürekli) $\qquad (\ell(f) = -f'' + qf)$

Teorem 4.4'den (sıfırın özdeğer olmadığını kabul ediyoruz)

$$f(x) = \int_0^{\pi} G(x,t)\, h(t)\, dt = -\int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)\, v_n(t)}{\lambda_n} \right] . \left[\underbrace{f''(t) - q(t) f(t)}_{\ell(f)} \right] dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n} \int_0^{\pi} v_n(t) . \ell(f)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} \frac{v_n(t)\, \ell(f)}{\lambda_n}\, dt \right] . v_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\int_0^{\pi} \frac{V_n(t)\, \ell(f)}{\lambda_n}\, dt \right]}_{a_n} \cdot V_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n(x) \quad (4.22) \qquad a_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\pi} V_n(t)\, \ell(f)\, dt \quad (4.23)$$

sürekli fonk dur. Dolayısıyla her sonlu aralıkta sınırlıdır.

$|V_n(x)| \leq C \qquad \frac{1}{|\lambda_n|} < c.n^{-2} \qquad |\ell(f)| \leq C$ olacak şekilde c sbt. vardır.

$$|a_n V_n(x)| \leq c_1 n^{-2} \qquad (c_1 > 0)$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n(x)$ serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

$V_n(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları 2. mertebeden sürekli türeve sahip olduklarından ve (4.2), (4.3) koşullarını sağladıklarından

$$\int_0^{\pi} V_n(t)\, \ell(f)\, dt = \int_0^{\pi} \ell(V_n) . f(t)\, dt$$

$$= \lambda_n \int_0^{\pi} V_n(t) . f(t)\, dt \qquad (4.24)$$

$$\left\{ \ell(V_n) = -V_n'' + q V_n = \lambda_n V_n \right\}$$

$V_n \rightarrow$ özfonk

$\lambda_n \rightarrow$ özdep.

(4.22), (4.23) ve (4.24)'ten

$$a_n = \int_0^{\pi} V_n(t) f(t)\, dt \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n(x)$$

Teorem 4.7: Reel $L_2[0,\pi]$ uzayının her f fonksiyonu için

$$\|f\|^2 \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} f(x)\cdot V_n(x)\,dx\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

formülü sağlanır. Bu eşitliğe Parseval eşitliği denir.

İspat: i) Önce f'in 2. mertebeden sürekli türeve sahip olduğunu ve (4.2),(4.3) koşullarını sağladığını varsayalım.

Teorem 4.6'dan yararlanarak

$$\int_0^{\pi}[f(x)]^2\,dx = \int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n(x)\right]^2 dx = \int_0^{\pi}\left[\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n V_n(x)\right]^2 dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n\cdot V_n(x)\right]^2 dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \underbrace{\int_0^{\pi} V_n^2(x)\,dx}_{=1} \qquad \text{(ortonormallikten)}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \Rightarrow \int_0^{\pi}[f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$\left[\sum a_n V_n(x)\right]^2 = \sum a_n^2 V_n^2(x) + \sum_{\substack{n,i=1\\ n\neq i}}^{N} a_n a_i V_n V_i$$

ii) Bu kez $f(x)$, $L_2[0,\pi]$ uzayının herhangi elemanı olsun.

$[0,\pi]$'de tanımlı her mertebeden sürekli türeve sahip olan 0 ve π noktalarının bir komşuluğunda sıfır olan fonksiyonların

$$\lim_{k\to\infty} |f_k - f|^2 = \lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} [f_k(x) - f(x)]^2 dx = 0$$

koşulunu sağlayan bir $\{f_k\}_1^{\infty}$ dizisinin varolduğunu biliyoruz. O halde $\{f_k\}$ fonksiyonları (4.2), (4.3) koşullarını da sağlar. Böylece (i)'den dolayı

$$|f_k|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^{(k)}]^2 \quad (k=1,2,\dots) \qquad a_n^{(k)} = \int_0^{\pi} f_k(x).V_n(x)dx \quad (n=1,2,\dots)$$

$$|a_n - a_n^{(k)}|^2 = \left| \int_0^{\pi} f(x).V_n(x)dx - \int_0^{\pi} f_k(x)V_n(x)dx \right|^2 \leq \left(\int_0^{\pi} |(f(x)-f_k(x))V_n(x)| \, dx \right)^2$$

Hölder'in Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak

$$|a_n - a_n^{(k)}|^2 \leq \int_0^{\pi} [f(x) - f_k(x)]^2 dx . \underbrace{\int_0^{\pi} V_n^2(x)\,dx}_{=1} = \int_0^{\pi} [f(x) - f_k(x)]^2 dx = |f - f_k|^2$$

$$\lim_{k\to\infty} |a_n - a_n^{(k)}|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_n - a_n^{(k)}| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_n^{(k)} = a_n \quad (n=1,2,\dots).$$