Asimptotlar

Eğer belirli bir doğruya, verilen bir fonksiyonun grafiği, doğru orjinden uzaklaştıkça, istenildiği kadar yakınlaşıyorsa, o zaman fonksiyonun grafiği asimptota sahiptir deriz.

Üç tip asimptot vardır: Düşey (dikey), yatay ve eğik asimptot

1. Düşey (Dikey) Asimptot:

Eğer $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$ veya $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ ya da her iki durumda mevcut ise

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği $x=a$'da bir düşey asimptota sahiptir denir.

Ör/ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x}$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulunuz. $(h>0)$

$D(f)$: $x^2-x \neq 0 \Rightarrow x(x-1)\neq 0 \quad x\neq 0 \quad x\neq 1$

$D(f) = \mathbb{R} - \{0,1\}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1-h)(1-h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1-h)(-h)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1+h)(1+h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1+h)\cdot h} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(0-h)(0-h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(h+1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(0+h)(0+h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(h-1)} = -\infty$$

2. Yatay Asimtot

Eğer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ veya $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ ya da her ikisi de mevcut ise $y = f(x)$ fonksiyonu için $y = L$ doğrusu bir yatay asimptottur.

Ör/ $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ fonksiyonunun yatay asimptotlarını bulunuz.

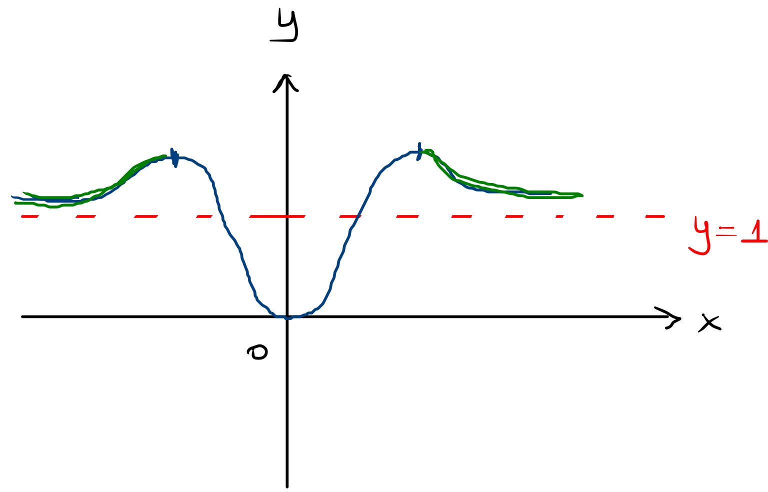
$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 0 \Rightarrow y = 0$$ yatay asimptot doğrusudur.

NOT: Bir eğrinin asimptotlarını kesemeyeceği kanısı yanlıştır.

Ör/ $g(x) = \dfrac{x^4 + x^2}{x^4 + 1}$ yatay asimptotlarını bulunuz.

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 1} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\cancel{x^4}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^4}\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)} = 1$$

$y = 1$ yatay Asimp.



Ör/ $y=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ fonksiyonunun yatay asimptotu nedir? Hangi noktalarda eğri asimptotu kesmektedir?

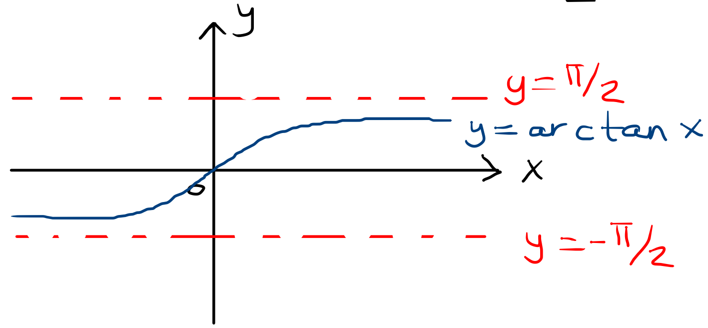
$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{\sin x}{1+x^2}=0$ olduğundan $y=0$ yatay asimptottur.

$y=0 \Rightarrow \dfrac{\sin x}{1+x^2}=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=n\pi$ $(n\in\mathbb{N})$ noktalarında eğri asimptotu keser.

Ör/ $y=\arctan x=\tan^{-1}x$ fonksiyonunun yatay asimptotlarını bulunuz.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=\arctan(-\infty)=-\arctan(\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\arctan\infty=\dfrac{\pi}{2}$



$y=-\dfrac{\pi}{2}$ ve $y=\dfrac{\pi}{2}$ yatay asimptot doğrularıdır.

Bu tür asimptotlara tek taraflı (ya da tek yönlü) asimptot denir.

3. Eğik Asimptot

1. Eğer $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ veya $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ya da

her iki durumda mevcut ise o zaman $y = ax+b$ $(a \neq 0)$ doğrusu $y = f(x)$'in grafiğinin bir eğik asimptotudur.

2. Eğer $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$ oluyorsa o zaman fonksiyonun grafiği eğik asimptota sahip olabilir. Eğer varsa da $y = ax+b$ şeklindedir.

$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ limiti mevcut ve sıfırdan farklı,

$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$ limiti mevcut ise $y = ax+b$ eğik asimptottur.

3. Eğer $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ → polinom şeklinde ise polinom bölmesi ile elde edilen bölüm eğik asimptotu verir.

Ör/ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulalım.

3.

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x \\ \hline -x^2 & \boxed{x} \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\boxed{x}$ → Eğik asimptot

2.

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\mp\infty \quad \text{E.A. olabilir.}$$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1\neq 0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x}=0$$

$\Rightarrow \boxed{y=x}$ → Eğik asimptot.

1.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x}$ → $x\to\infty$ sıfıra yaklaşır.

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}-x\right]=0$$

$\Rightarrow$ $y=x$ Eğik asimptottur.

Ör/ $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{1+e^x}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} xe^x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$$

$e^{-\infty}=0$

$y=0$ Yatay Asimptot

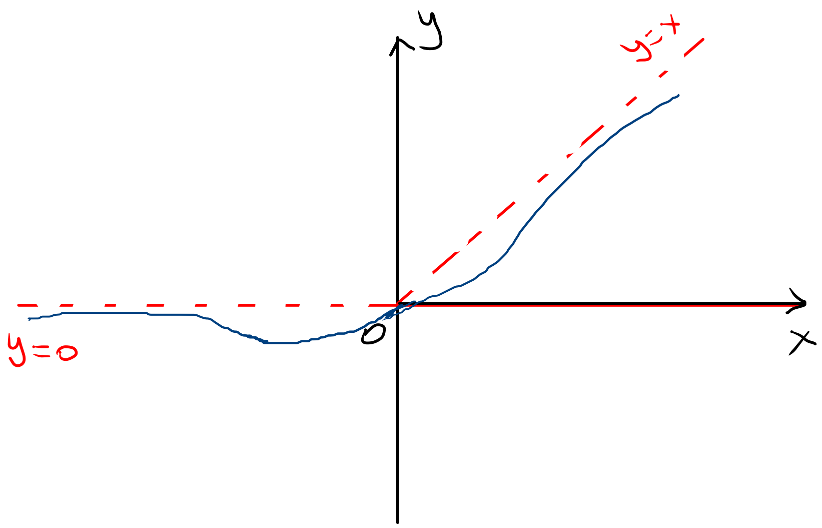
$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{1+e^x}\underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+xe^x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}(1+x)=\infty$$

(L'H)

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{x(1+e^x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{x+xe^x}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+xe^x}{1+(e^x+xe^x)}\underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^x+xe^x}{e^x+e^x+xe^x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{xe^x}{1+e^x}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{xe^x}-x-\cancel{xe^x}}{1+e^x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^x}=0$$

$\boxed{y=x}$ Eğik asimptot doğrusudur. ve tek yönlüdür.



Bir rasyonel fonksiyonun asimptotları

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\begin{array}{l}\to m \text{ dereceli polinom}\\ \to n \text{ dereceli polinom}\end{array}$$

a) $Q_n(x)=0$ olan her x noktasında grafik bir düşey asimptota sahiptir.

b) Eğer $m<n$ ise grafik iki taraflı $y=0$ yatay asimptotuna sahiptir.

c) Eğer $m=n$ ise grafik iki taraflı $y=L$ $(L\neq 0)$ yatay asimptotuna sahiptir.
L, P ve Q'nun en yüksek dereceli katsayıları oranına eşittir.

d) Eğer $m=n+1$ ise grafik iki taraflı eğik asimptota sahiptir.

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=ax+b+\frac{R(x)}{Q_n(x)} \qquad y=ax+b\to E.A.$$

e) Eğer $m > n+1$ ise grafiğin yatay ve eğik asimptotları yoktur.

Eğri Çizimleri

Bir $y=f(x)$ grafiğini çizerken 3 kaynağımız vardır: fonksiyonun kendisi, 1. mertebe türevi ve 2. mertebe türevi.

1. Fonksiyonun kendisi (f): Tanım kümesi, eksenleri kestiği noktalar, simetriklik, asimptotlar

$D(f)$, $x=0$ için y değerleri, $y=0$ için x değerleri , $x \to -x$ $y=y$ mi? $y=-y$ mi? , düşey asim., yatay ", eğik "

2. Fonksiyonun 1. mertebe türevi (f'): Artan-azalan aralıklar, kritik, tekil noktalar

f''nün işareti , $f'=0$, $f' \to \infty$
x_0

3. Fonksiyonun 2. mertebe türevi (f''): Konkavlıklar, max-min noktalar, büküm noktaları

f'' nün işareti , $x_0 \to$ kritik nokta, $x_1 \to$ tekil nokta $\Rightarrow$ $f''(x_0)$, $f''(x_1)$ işareti
$f''>0 \Rightarrow$ min, $f''<0 \Rightarrow$ max

, $f''(x_2)=0$
x_2 de teğet olmalı, x_2'de konkavlık yön değiştirmeli

Ör

$y = x+1$'in grafiğini çizelim.

1°) $D(f) : \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

2°) $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$y = 0 \Rightarrow x = -1$

3°) $x \to -x \quad y = -x+1 \neq y$

$\neq -y$

4°) D.A yoktur. Fonksiyonu tanımsız kılan değer yoktur.

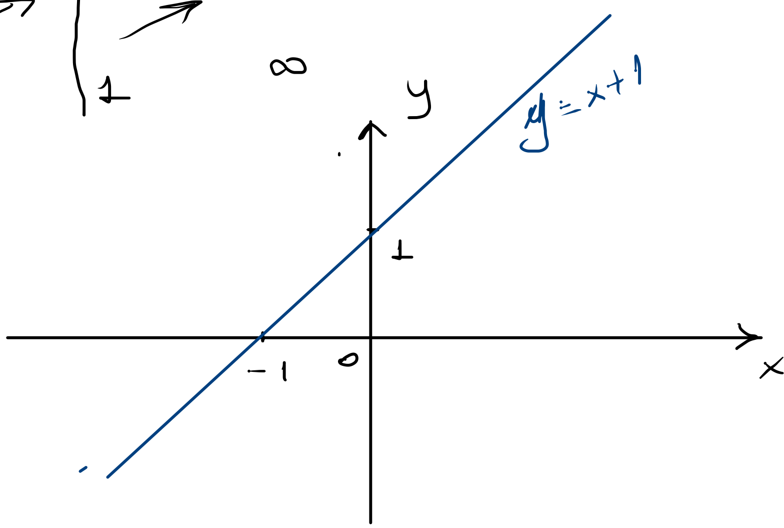
$$\lim_{x \to \mp\infty} x+1 = \lim_{x \to \mp\infty} x+1 = \mp\infty \quad \text{Y.A yoktur.}$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} [(x+1) - \underbrace{(x+1)}_{f(x)}] = 0 \quad \text{E.A yoktur.}$$

5°) $f'(x) = 1 > 0$ ekstrem değer yok.

6°) $f''(x) = 0$ konkavlık yoktur.

x	$-\infty$	-1	0	∞
f'	$+$	$+$	$+$	
f	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	∞



Ör/ $y = x^2 - 5x + 6$ eğrisini çizelim.

1°) $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

2°) $y = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$x = 2 \quad x = 3$

$x = 0 \Rightarrow y = 6$

3°) $x \to -x \Rightarrow (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6 \neq y$
$\neq -y$

4°) $D(f): \mathbb{R}$ D.A yoktur.

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} x^2 - 5x + 6 = \infty$ E.A olabilir.

$a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x} = \infty$ olduğundan E.A yoktur. Eğri kolu parabaliktir.

5°) $f'(x) = 2x - 5$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ K.N. $\Rightarrow y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 6$

$= \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6$

$= -\frac{25}{4} + 6$

$= -\frac{1}{4}$

x		$5/2$	
f'	$-$		$+$

6°) $f''(x) = 2 > 0$

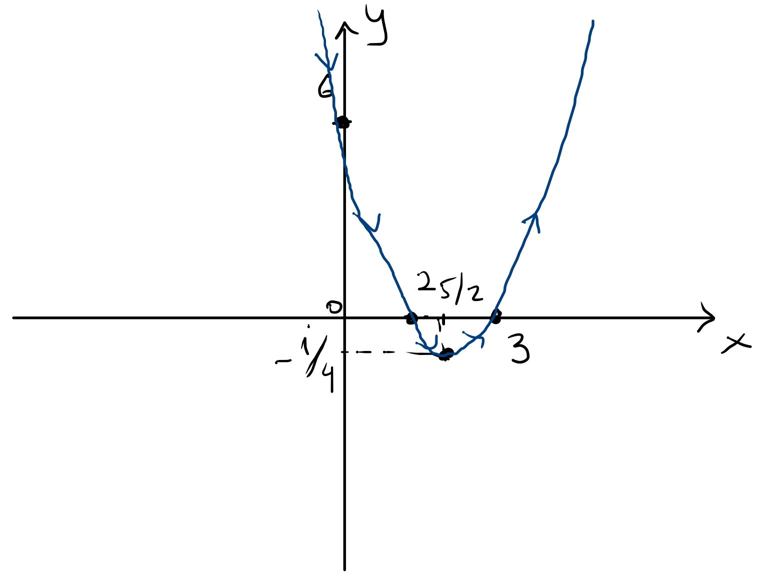
$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ min. noktadır.

x	$-\infty$	0	2	$5/2$	3	∞
f''	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
f'	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
f	∞ yukarı konk. $\searrow$	6 yukarı konk. $\searrow$	0 yukarı konk. $\searrow$	$-1/4$ yukarı konk. $\nearrow$	0 yukarı konk. $\nearrow$	∞

min

x	$-\infty$	0	2	$5/2$	3	∞
f''	+	+	+	+	+	
f'	−	−	−	+	+	
f	∞ ↘ yukarı konk.	6 ↘ yukarı konk.	0 ↘ yukarı konk.	$-1/4$ ↗ yukarı konk.	0 ↗ yukarı konk.	∞

min



Ör/ $y = \dfrac{x^2+2x+4}{2x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1°) $D(f): \mathbb{R} - \{0\}$

2°) $y=0 \Rightarrow x^2+2x+4=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \mp \sqrt{4-16}}{2}$ reel sayı değeri yok.

Eksenler kesilmiyor

3°) $x \to -x$ $\quad \dfrac{(-x)^2+2(-x)+4}{2(-x)} = \dfrac{x^2-2x+4}{-2x} \neq y$
$\neq -y$

4°) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+2x+4}{2x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \mp\infty} \dfrac{x^2+2x+4}{2x} = \lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{2x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2x+4}{2x} = \infty$

$= \mp\infty$ Y.A. yoktur
E.A olabilir.

$m=2$
$n=1$ $\quad m>n$ olduğun.

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+4 & 2x \\ \hline -x^2 \quad\quad\; & \boxed{\frac{x}{2}+1} \to \text{E.A.} \\ 2x+4 & \\ \cancel{-2x} & \end{array}$$

5°) $f'(x) = \dfrac{(2x+2)\cdot 2x - 2(x^2+2x+4)}{4x^2} = \dfrac{4x^2+\cancel{4x}-2x^2-\cancel{4x}-8}{4x^2} = \dfrac{2x^2-8}{4x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$ K.N.

$x^2=0 \Rightarrow x_{1,2}=0 \Rightarrow f' \to \infty \Rightarrow x=0$ T.N.

x		-2		0		2	
f'	$+$		$-$		$-$		$+$

6°) $f''(x) = \dfrac{4x\cdot 4x^2 - 8x\cdot(2x^2-8)}{16x^4} = \dfrac{\cancel{16x^3}-\cancel{16x^3}+64x}{16x^4} = \dfrac{4}{x^3}$

x		0	
f''	$-$		$+$

$f''(-2) = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2} < 0$ max. vardır.

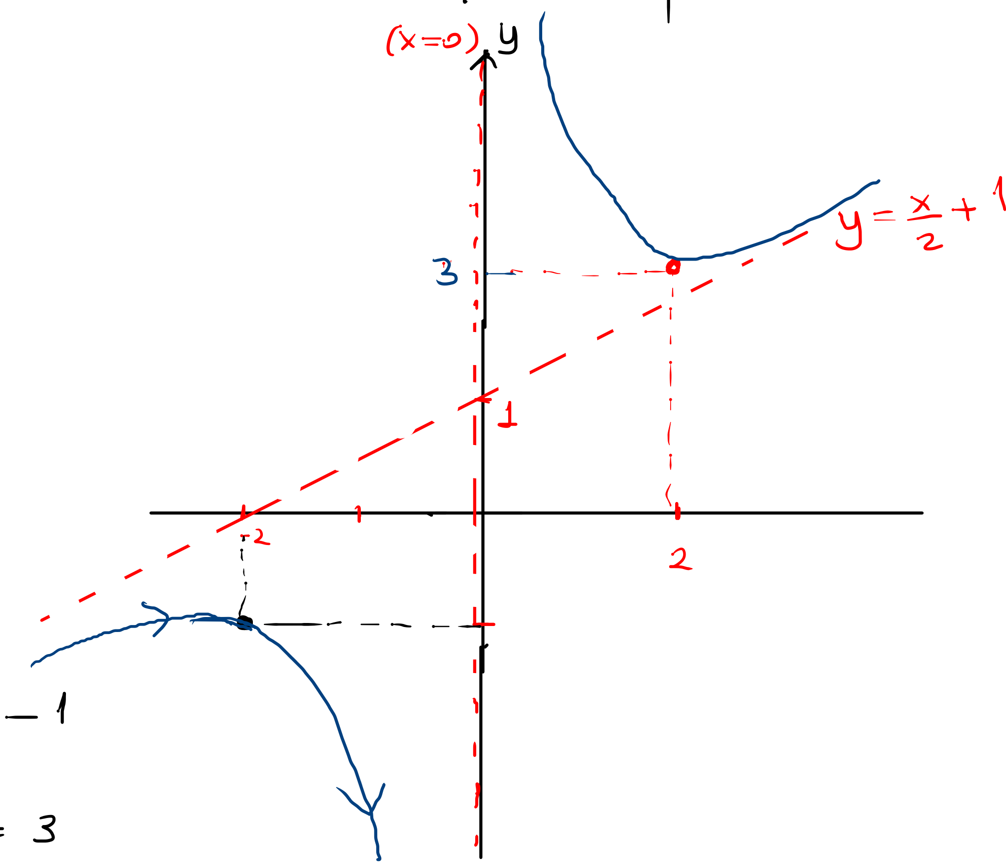
$f''(2) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} > 0$ min. vardır.

x	$-\infty$ -2	0	2 ∞	
f''	$-$	$-$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	aşağı $-\infty \nearrow -1$	aşağı $\searrow -\infty$	yukarı $+\infty \searrow 3$	yukarı $\nearrow \infty$

max.   min.

$x=-2 \Rightarrow y = \dfrac{4-4+4}{-4} = -1$

$x=2 \Rightarrow y = \dfrac{4+4+4}{4} = 3$



Ör/ $y = x \cdot e^{-x^2/2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$D(f): \mathbb{R}$

$x=0 \Rightarrow y=0$
$y=0 \Rightarrow x=0$

$x \to -x \Rightarrow y = -x\, e^{-\frac{(-x)^2}{2}}$

$y = -x e^{-\frac{x^2}{2}} = -y$

orjine göre simetriktir.

D.A. yoktur.

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \overset{0.\infty}{=} \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{1}{x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$

$y=0$ Y.A. doğrusudur.

$f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}\, e^{-3/2}$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\, e^{-3/2}$

$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot \left(-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = (1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$ K.N.

x		-1		1	
f'	$-$		$+$		$-$

$f''(x) = -2x\, e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-x^2) \cdot \left(-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$= (x^3 - 3x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2-3) = 0$

$x = 0 \quad x = \mp\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f''	$-$		$+$		$-$		$+$

$f''(-1) = 2e^{-1/2} > 0$ min.

$f''(1) = -2e^{-1/2} < 0$ max.

$f(-1) = -\dfrac{1}{\sqrt{e}} \qquad f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$ (B.N.)		-1		0 (B.N)		1		$\sqrt{3}$ (B.N)		∞
f''		$-$	$\bullet$	$+$		$+$	$\bullet$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$	
f'		$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$	$\bullet$	$-$		$-$	
f	0	aşağı ↘	$-\sqrt{3}e^{-3/2}$ (-0.39)	yukarı ↘	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$ (-0.61) min.	yukarı ↗	0	aşağı ↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ (0.61)	aşağı ↘	$\sqrt{3}.e^{-3/2}$ (0.39) max.	yukarı ↘	0