TEOREM

Eğer $L(D)$ sabit katsayılı bir operatör ise

$$L(D).e^{rx} = L(r).e^{rx}.$$

dir. r reel ya da kompleks sabittir.

$$e^{rx} \to (e^{rx})' = re^{rx}, \quad (e^{rx})'' = r^2e^{rx}, \ldots, (e^{rx})^{(n)} = r^n e^{rx}$$

$$L(D).e^{rx} = \left[a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n\right]e^{rx}$$

$$= a_0r^ne^{rx} + a_1r^{n-1}e^{rx} + \cdots + a_{n-1}re^{rx} + a_ne^{rx}$$

$$= \left[a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n\right]e^{rx}$$

$$= L(r).e^{rx}$$

$$L(D)\,y=\left(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n\right)y=0$$

denkleminin $y=e^{rx}$ şeklinde çözümlerini arayalım. Bu durumda

$L(D)e^{rx}=0$ olacaktır. Eğer $L(D)e^{rx}=0$ olacak şekilde r belirlenebilirse

$y=e^{rx}$ çözüm olur.

$$L(D)e^{rx}=0 \Rightarrow L(r)\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}=0 \text{ 'dır.}$$

$$L(r)=0$$

olmalıdır. O halde

$L(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$ dır. Bu r'ye göre n. dereceden bir polinom-dur. Polinomun çözümü olan $r_1, r_2, \ldots, r_n$'e göre sabit katsayılı ikinci tarafsız lineer denklemin lineer bağımsız çözümleri

$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$ olarak belirlenir ve istenen

genel çözüm

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$ olarak bulunur.

$\boxed{L(r) = 0}$ → dif. denklemin karakteristik denklemi adını alır.

Karakteristik denklemin kökleri

1°) karakteristik denklemin kökleri $r_1 \neq r_2 \neq \cdots \neq r_n$ olsun. (reel ve birbirinden farklı kökler)

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \to & y_1 = e^{r_1 x} \\ r_2 \to & y_2 = e^{r_2 x} \\ \vdots & \vdots \\ r_n \to & y_n = e^{r_n x} \end{array}\right\} \quad y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

Ör/1. $y'' - y' = 0$

$D^2 y - Dy = 0 \Rightarrow \underbrace{(D^2 - D)}_{L(D)} y = 0 \Rightarrow$ K.D: $L(r) = 0$

$\Rightarrow r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r-1) = 0$

$r_1 = 0 \Downarrow y_1 = e^{0.x}$ $\quad r_2 = 1 \Downarrow y_2 = e^{1.x}$

$\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow \boxed{y = c_1 + c_2 e^x}$

Ör/2. $y'' - y' - 2y = 0$

$\underbrace{(D^2 - D - 2)}_{L(D)} y = 0 \Rightarrow$ K.D: $L(r) = 0 \Rightarrow r^2 - r - 2 = 0$

$(r-2)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 2, \ r_2 = -1$

$\Downarrow y_1 = e^{2x}$ $\quad \Downarrow y_2 = e^{-x}$

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$$

Ör/3. $y''' + 2y'' - 3y' = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\underbrace{(D^3 + 2D^2 - 3D)}_{L(D)}y = 0$

karakteristik denk: $L(r) = 0$

$\Rightarrow r^3 + 2r^2 - 3r = 0$

$r(r^2 + 2r - 3) = 0$

$r(r+3)(r-1) = 0$

$r_1 = 0 \quad r_2 = -3 \quad r_3 = 1$

$\Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = e^{-3x},\ y_3 = e^{x} \Rightarrow \boxed{y = c_1 + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{x}}$

2°) r_1, k katlı reel kök, diğerleri de birbirinden farklı reel kökler ise;

$r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_k = r$

$r_{k+1} \neq r_{k+2} \neq \dots \neq r_n$

$r_1 \to e^{rx}$

$r_2 \to e^{rx} \cdot x$

$r_3 \to e^{rx} \cdot x^2$

$\vdots \qquad \vdots$

$r_k \to e^{rx} \cdot x^{k-1}$

$r_{k+1} = e^{r_{k+1}x}, \dots, r_n = e^{r_n x}$

$$\boxed{\begin{aligned} y = {} & (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}) \cdot e^{rx} \\ & + c_{k+1} \cdot e^{r_{k+1}x} + \dots + c_n e^{r_n x} \end{aligned}}$$

Not: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

k.D:

$$L(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r$$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{rx} + \cdots + c_n e^{rx} = (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) e^{rx} = k e^{rx}$$

$$k = k(x)$$

$$y = k(x) e^{rx}$$

$$y' = k' e^{rx} + r k e^{rx}$$

$$y'' = k'' e^{rx} + 2r k' e^{rx} + r^2 k e^{rx} \to k''' e^{rx} + r k'' e^{rx} + 2r k'' e^{rx} + 2r^2 k' e^{rx} + r^2 k' e^{rx} + r^3 k e^{rx}$$

$$y''' = k''' e^{rx} + 3r k'' e^{rx} + 3r^2 k' e^{rx} + r^3 k e^{rx}$$

$$y^{(n)} = k^{(n)} e^{rx} + \binom{n}{1} r k^{(n-1)} e^{rx} + \cdots + \binom{n}{n-1} r^{n-1} k' e^{rx} + r^n k e^{rx} \Rightarrow k = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{n-1})$$

2. mertebe denk için

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

K.D: $\not{L}(r) = 0 \Rightarrow a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{rx} = (c_1 + c_2) e^{rx} = k e^{rx}$$

$k = k(x) \Rightarrow y = k(x). e^{rx}$ $\quad y' = k' e^{rx} + r k e^{rx}$

$$y'' = k'' e^{rx} + 2r k' e^{rx} + r^2 k e^{rx}$$

$$a_0 \left[k'' e^{rx} + 2r k' e^{rx} + r^2 k e^{rx} \right] + a_1 \left[k' e^{rx} + r k e^{rx} \right] + a_2 k e^{rx} = 0$$

$$a_0 k'' e^{rx} + k' \underbrace{(2a_0 r + a_1)}_{\frac{d}{dr}(k.D) = 0} e^{rx} + k \underbrace{(a_0 r^2 + a_1 r + a_2)}_{k.D = 0} e^{rx} = 0$$

$\Rightarrow \underbrace{a_0}_{\neq 0} k'' \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow k'' = 0$

$k' = c_1$

$k = c_1 x + c_2$

$$y = (c_1 x + c_2) . e^{rx}$$

Ör/ $(D-1)(D-3)^4 y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$L(D) = (D-1)(D-3)^4$

k.D: $L(r) = (r-1)(r-3)^4 = 0$

$r_1 = 1 \,,\quad r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 3$

$$\boxed{y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2 + c_5 x^3) e^{3x}}$$

Ör/ $y''' + 3y'' - 4y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(D^3 + 3D^2 - 4)y = 0$ k.D: $L(r) = r^3 + 3r^2 - 4 = 0 \Rightarrow L(r) = (r-1)(r^2+4r+4) = 0$

$(r-1)(r+2)^2 = 0$

$r_1 = 1 \quad r_2 = r_3 = -2$

$r = 1$

Horner Yöntemi

	1	3	0	-4
$+1$		1	4	4
	1	4	4	0

$$\begin{array}{l|l} \cancel{r^3} + 3r^2 - 4 & r-1 \\ \cline{2-2} -\cancel{r^3} + r^2 & r^2 + 4r + 4 \\ \hline 4\cancel{r^2} - 4 & \\ -\cancel{4r^2} + 4r & \\ \hline 4r - 4 & \\ -4r + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\boxed{y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) e^{-2x}}$$

3°) r_1, r_2 kompleks kök ise

$r_{1,2} = \alpha \mp i\beta$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{r_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} \\ y_2 &= e^{r_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} \end{aligned}\right\} \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$= c_1 e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$= e^{\alpha x}\left[c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[c_1 (\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2 (\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[\underbrace{(c_1 + c_2)}_{A}\cos\beta x + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{B}\sin\beta x\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned}}$$

Euler formülleri

r_1, r_2 kompleks diğer kökler birbirinden farklı reel kök ise

$r_{1,2} = \alpha \mp i\beta, \quad r_3 \neq r_4 \neq \dots \neq r_n$

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right] + c_3 e^{r_3 x} + c_4 e^{r_4 x} + \dots + c_n e^{r_n x}}$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ör/ $y''' + 3y'' + 7y' + 5y = 0$ dif. denk.'nin genel çözümünü bulunuz.

$(D^3 + 3D^2 + 7D + 5)y = 0$

K.D: $L(r) = r^3 + 3r^2 + 7r + 5 = 0$

$r^3 + 3r^2 + 2r + 5r + 5 = 0$

$r(r^2 + 3r + 2) + 5(r+1) = 0$

$r(r+1)(r+2) + 5(r+1) = 0$

$(r+1)\left[r(r+2) + 5\right] = 0$

$\Rightarrow (r+1)(r^2 + 2r + 5) = 0$

$r_1 = -1 \qquad r_{2,3} = \dfrac{-2 \mp \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \mp 2i$

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + e^{-x}\left(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x\right)}$$

Ör/ $\underbrace{(D^2+1)}_{L(D)}y=0$ dif. denkleminin $y(0)=1$, $y(\frac{\pi}{2})=-1$ koşullarına uygun çözümünü bulunuz.

K.D: $L(r)=r^2+1=0 \Rightarrow r^2=-1 \Rightarrow r_{1,2}=\mp i \Rightarrow \boxed{y=c_1\cos x+c_2\sin x}$ G.Ç.

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array} \Big\} \Rightarrow 1=c_1\underbrace{\cos 0}_{1}+c_2\underbrace{\sin 0}_{=0} \Rightarrow c_1=1 \\ y(\frac{\pi}{2})=-1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ y=-1 \end{array} \Big\} \Rightarrow -1=c_1\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}+c_2\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \Rightarrow c_2=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=\cos x-\sin x}$$

Verilen koşullara uygun çözüm.

4°) Katlı kompleks kökler varsa (kompleks kökler 2 katlı ise)

$$\left.\begin{array}{l} r_{1,2}=\alpha\mp i\beta \\ r_{3,4}=\alpha\mp i\beta \\ r_5\neq r_6\neq\cdots\neq r_n \end{array}\right\} \Rightarrow y=e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2x)\cos\beta x+(c_3+c_4x)\sin\beta x\right]+c_5e^{r_5x}+c_6e^{r_6x}+\cdots+c_ne^{r_nx}$$

Kompleks kökler k katlı ise, diğer kökler birbirinden farklı reel kök ise;

$$\boxed{y=e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2x+\cdots+c_kx^{k-1})\cos\beta x+(c_{k+1}+c_{k+2}x+\cdots+c_{2k}x^{k-1})\sin\beta x\right]+c_{2k+1}e^{r_{2k+1}x}+\cdots+c_ne^{r_nx}}$$

Ör/ $y^{(4)}+2y''+y=0$ dif. denk.'nin genel çöz. bulunuz.

$\underbrace{(D^4+2D^2+1)}_{L(D)}y=0 \Rightarrow$ k.D: $L(r)=r^4+2r^2+1=0$

$(r^2+1)^2=0 \Rightarrow r_{1,2}=\mp i \quad r_{3,4}=\mp i$

$$\boxed{y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x}$$

Ör/ $(D^2+4)^2 y = 0$ dif. denk'nin genel çöz. bulunuz.

$L(D) = (D^2+4)^2$

k.D: $L(r) = (r^2+4)^2 = 0 \Rightarrow \quad r_{1,2} = \mp 2i \quad r_{3,4} = \mp 2i$

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin 2x}$$

Ancak $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ alt aralığındaki tüm x değerleri için (1) eşitliği sadece $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olduğunda gerçekleniyorsa o zaman $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarına lineer bağımsız fonksiyonlardır denir.

Ör/ $\left.\begin{aligned} f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= 2x \end{aligned}\right\}$ $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde f_1 ve f_2 lineer bağımlıdırLar.

Çünkü

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 \cdot x + c_2 \cdot 2x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -2 \neq 0 \\ c_2 &= 1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 2 \neq 0 \\ c_2 &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Ör/ $\left.\begin{aligned} f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= x^2 \end{aligned}\right\}$ $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde f_1 ve f_2 lineer bağımsızdırlar.

$c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \Rightarrow c_1 x + c_2 x^2 = 0$ eşitliği sadece $c_1 = c_2 = 0$ için sağlanır.

Tanım: $I=[a,b]$ aralığında tanımlı $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonlarının n. mertebeye kadar sürekli türevleri olsun. Bu durumda bu fonksiyonların I aralığında lineer bağımlı olması için gerek koşul I aralığındaki her x değeri için

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır. Bu determinanta $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonlarının Wronskian determinantı denir. $W=0$ olması lineer bağımlılık için gerek koşuldur, yeterli değildir.

$f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonlarının I aralığında Lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $W \neq 0$ olmasıdır.

Ör/ a ve b iki reel sayı $b \neq 0$ olsun. Bu durumda

$f_1 = e^{ax}\cos bx$, $f_2 = e^{ax}\sin bx$ fonksiyonları tüm reel eksende Lineer bağımsızdırlar.

$$f_1' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx \qquad f_2' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$$

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx - be^{ax} & ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \end{vmatrix}$$

$$= \cancel{ae^{2ax}\sin bx\cos bx} + be^{2ax}\cos^2 bx - \cancel{ae^{2ax}\cos bx\sin bx} + be^{2ax}\sin^2 bx$$

$$= \underbrace{b}_{\neq}\underbrace{e^{2ax}}_{\neq 0} \neq 0$$

Ör/ $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ fonksiyonları herhangi bir aralıkta Lineer bağımlıdırlar.

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \sin^2 x + c_3 \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = -1 \neq 0, \quad \underset{\neq 0}{c_2 = 1}, \quad \underset{\neq 0}{c_3 = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow -1 + 1 = 0$$

$$W(1, \sin^2 x, \cos^2 x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & 2\sin x\cos x & -2\sin x\cos x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 2x \\ 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x$$

$$= 0$$

TEOREM

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = F(x) \qquad (1)$$

lineer ikinci taraflı denklem ile

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

lineer ikinci tarafsız denklem verilmiş olsun. Burada $A_i(x)$ $(i=0,\dots,n)$ ve $F(x)$ bir I aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar ve $A_0(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda (2) denkleminin I aralığında n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Eğer $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları (2) denkleminin lineer bağımsız çözümleri iseler

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

fonksiyonu (2) denkleminin genel çözümüdür. Bundan başka verilen I aralığında (1) denkleminin de çözümleri vardır. Eğer y_0 (1) denkleminin bir çözümü ise

$y = y_h + y_ö$ fonksiyonu (1) denklemin genel çözümü olur.

$$\boxed{y = y_h + y_ö}$$

→ ikinci taraflı denklemin genel çözümü

y_h: ikinci tarafsız denklemin genel çözümü

$y_ö$: ikinci taraflı denklemin bir çözümü

ikinci tarafsız denk = Homojen dif. denk

İkinci taraflı denk = Homojen olmayan dif. denk.

Sabit Katsayılı Lineer dif. denklemler

$a_0 \neq 0$, $n > 0$ tamsayı ve a_i $(i=0,1,\dots,n)$'ler sabit olmak üzere

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$ şeklindeki denklemlerdir.

Bu denklemlerin genel çözümü teoremde ifade edildiği gibi ikinci tarafsız (homojen) denklemin genel çözümü ile ikinci taraflı (homojen olmayan) denklemin bir çözümünün toplamına eşittir.

Sabit katsayılı ikinci tarafsız (homojen) lineer denklemler

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad \rightarrow \frac{d}{dx} = D$$

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = 0$$

$$\underbrace{\left[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right]}_{L(D)} \cdot y = 0$$

$L(D)\, y = 0$ denkleminin lineer bağımsız n tane $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümü bilinirse genel çözümü

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfi parametreler olmak üzere $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ şeklindedir.