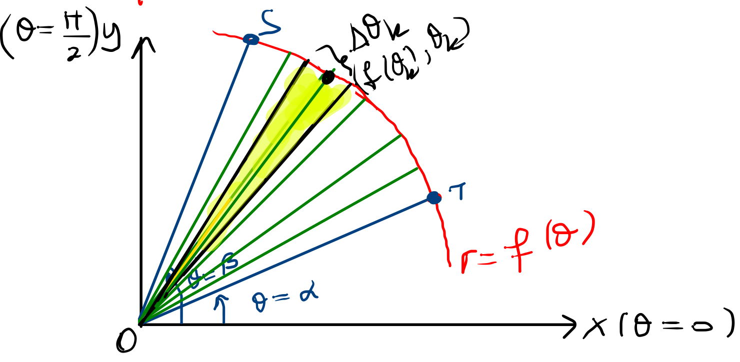
Kutupsal koordinatlarda alanlar ve uzunluklar



TOS bölgesinin $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ ışınları ve $r=f(\theta)$ eğrisi ile sınırlı olduğunu kabul edelim. Bölgeye n tane üst üste binmeyen tabanları TOS açısının bir P bölünüşünün üzerinde olan pervane şekilli dairesel kesitle yaklaşımda bulunuruz. Bir kesitin yarıçapı $r_k=f(\theta_k)$ ve radyan olarak ölçülen merkez açısı $\Delta\theta_k$ dır.

Bir daire diliminin alanı : $A_k=\frac{1}{2}r_k^2\cdot\Delta\theta_k=\frac{1}{2}[f(\theta_k)]^2\Delta\theta_k$

TOS bölgesinin alanı ise yaklaşık olarak;

$$\sum_{k=1}^{n} A_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}[f(\theta_k)]^2\Delta\theta_k$$

şeklinde hesaplanır. Eğer f sürekli ise P bölünüşünün normu sıfıra yaklaşırken (n'i ∞ olarak arttırırken) bu yaklaşımın iyileşmesini bekleriz. (P nin normu $\Delta\theta_k$'nın en büyük değeridir)

$$A=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \|P\|\to 0\\ \max\limits_{1\le k\le n}\Delta\theta_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \|P\|\to 0\\ \max\limits_{1\le k\le n}\Delta\theta_k\to 0}}\frac{1}{2}[f(\theta_k)]^2\Delta\theta_k=\frac{1}{2}\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}[f(\theta_k)]^2\,d\theta$$

} $r=f(\theta)$ $\alpha\le\theta\le\beta$ eğrisi ile orjin arasındaki bölgenin alanı

Ör/ $r=2(1+\cos\theta)$ kardioidiyle çevrili olan alanı hesaplayın.

$D(f(\theta))=\mathbb{R}$

$\cos\theta$ periyodik olduğundan periyodu uzunluğunda bir aralık tanım kümesi (inceleme aralığı) olarak gözönüne alınabilir.

İnc. aralığı : $[-\pi,\pi]$

$\theta\to-\theta \Rightarrow r=2[1+\cos(-\theta)]=2[1+\cos\theta]=r$ — Kutupsal eksen simetri eksenidir.

İnceleme sadece pozitif değerler için yapılır.

$[-\pi,\pi]\longrightarrow[0,\pi]$

$\theta\to\pi-\theta \Rightarrow r=2[1+\cos(\pi-\theta)]=2[1-\cos\theta]\neq r, \neq -r$

$\theta\to\pi+\theta \Rightarrow r=2[1+\cos(\pi+\theta)]=2[1-\cos\theta]\neq r, \neq -r$

} simetri yok.

θ	0	$\pi/2$	π
r'	$-$		$-$
r	$4 \longrightarrow$	$2 \longrightarrow$	0

$r'=-2\sin\theta<0$

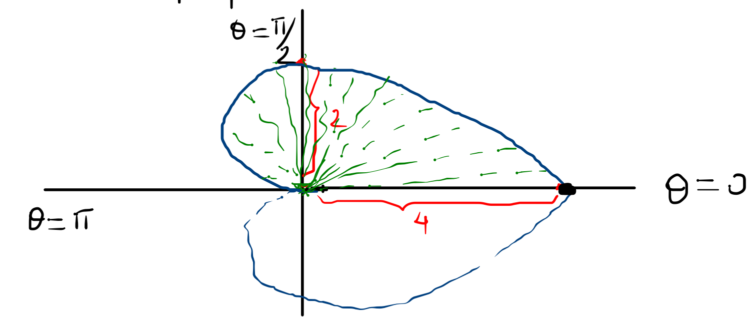
$r=0 \Rightarrow 2(1+\cos\theta)=0 \Rightarrow \cos\theta=-1$

$\theta=\pi$

$\theta=0 \Rightarrow r=4$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=2$

$\theta=\pi \Rightarrow r=0$



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[2.(1+\cos\theta)]^2\,d\theta$$

$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[2\cdot(1+\cos\theta)\right]^2 d\theta \Rightarrow A = 4\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} d\theta + 8\int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta + 4\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4\theta\Big|_0^{\pi} + \cancelto{0}{8\sin\theta\Big|_0^{\pi}} + 2\int_0^{\pi} d\theta + 2\int_0^{\pi}\cos 2\theta\, d\theta$$

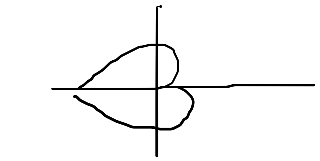
$$= 4\pi + 2\theta\Big|_0^{\pi} + \cancelto{0}{\sin 2\theta\Big|_0^{\pi}}$$

$$= 4\pi + 2\pi$$

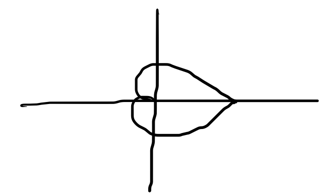
$$= 6\pi \ br^2$$

NOT:

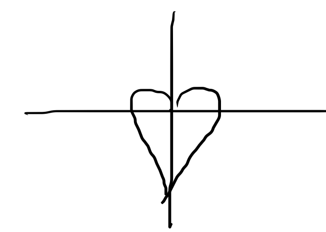
$r = 1-\cos\theta$



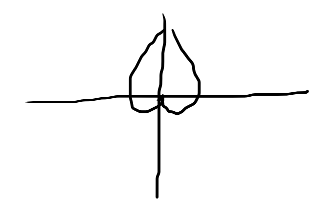
$r = 1+\cos\theta$



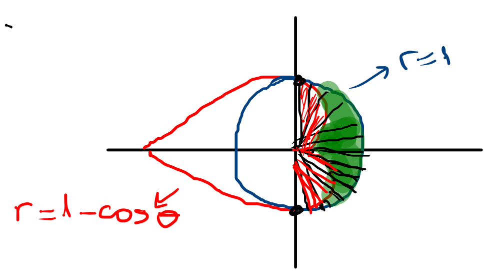
$r = 1-\sin\theta$



$r = 1+\sin\theta$



Ör/ $r=1$ çemberinin içinde ve $r=1-\cos\theta$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[1^2-(1-\cos\theta)^2\right] d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2}(\cancel{1}-\cancel{1}+2\cos\theta-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta$$

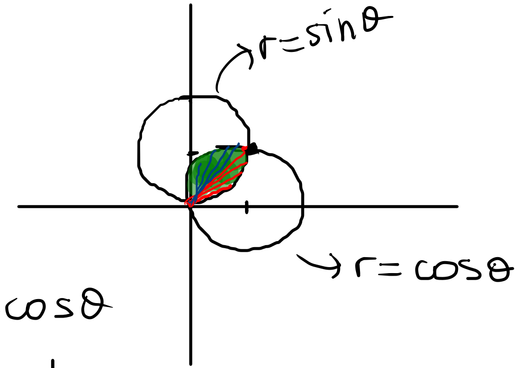
$$= 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta = 2\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] - \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 2 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{4}\left[\cancel{\sin\pi - \sin 0}\right]^{0}\right]$$

$$= 2 - \frac{\pi}{4} \quad br^2$$

Ör/ $r=\cos\theta$ ve $r=\sin\theta$ eğrilerinin kesişim bölgesinin alanını bulunuz.



$\sin\theta = \cos\theta$

$\tan\theta = 1$

$\theta = \pi/4$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\sin\pi}^{0}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{16}} - \frac{1}{8} + \frac{\pi}{8} - \cancel{\frac{\pi}{16}} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{\pi - 2}{8} \ br^2$$

Kutupsal Eğrinin Uzunluğu

$r = f(\theta)$ $\alpha \leq \theta \leq \beta$ eğrisinin uzunluğu için kutupsal koordinat formülünü parametrizasyondan yararlanarak elde ederiz.

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad \alpha \leq \theta \leq \beta$$
$$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]^2 + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]^2}\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2\cos^2\theta - \underbrace{2f'(\theta)\cancel{\cos\theta}\, f(\theta)\sin\theta}_{} + [f(\theta)]^2\sin^2\theta + [f'(\theta)]^2\sin^2\theta + \underbrace{2f'(\theta)\cancel{\sin\theta}\, f(\theta)\cos\theta}_{} + [f(\theta)]^2\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + f[\theta]^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\theta$$

Ör/ $r = 1 - \cos\theta$ eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız.

$r' = \sin\theta$

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(\sin\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$$

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$s = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= -4 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= -8\left(\cos\frac{\pi}{2}^{\,0} - \cos 0\right)$$

$$= 8 \text{ br.}$$

Ör/ $r=1$ çemberinin uzunluğunu bulunuz.

$r'=0$

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{0^2+1^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi \text{ br}$$