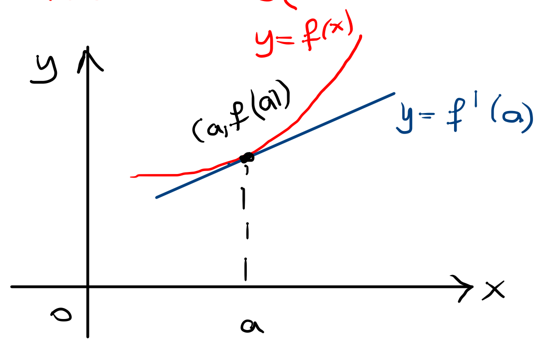
Lineer Yaklaşım (Lineerizasyon) ve Diferansiyel



Genel olarak $y=f(x)$'in türevlenebilir olduğu bir $x=a$ noktasındaki teğeti $(a, f(a))$ noktasından geçer, dolayısıyla teğet denklemi

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

şeklindedir. Yani, teğet

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Lineer fonksiyonunun grafiğidir. Doğru fonksiyonun grafiğine yakın kaldığı sürece $L(x)$, $f(x)$'e iyi bir yaklaşım verir.

Tanım:

f fonksiyonu, $x=a$'da türevlenebilirse

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

yaklaştırma fonksiyonu, f'in $x=a$ noktasındaki Lineerizasyonudur. f'e L tarafından yapılan $f(x) \cong L(x)$ yaklaşımı f'in $x=a$ noktasındaki standart lineer yaklaşımıdır. $x=a$ noktası da yaklaşımın merkezidir.

Ör: $f(x) = \sqrt{1+x}$ $x=0$ noktasındaki lineerizasyonunu bulunuz.

$f(0) = 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $f'(0) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow L(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$

$$= 1 + \frac{1}{2}x$$

Ör/ $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ deki Lineerizasyonunu bulunuz.

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow L(x) = 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow L(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$\cos 89° \cong ?$ $$f\left(\frac{89\pi}{180}\right) \cong L\left(\frac{89\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{89\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

$$89° = \frac{89\pi}{180}$$

Ör/ $\sqrt{26} \cong ?$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x = 25$'te Lineerizasyon

$f(25) = 5$

$f'(25) = \frac{1}{10}$

$$L(x) = f(25) + f'(25)(x - 25)$$

$$f(26) \cong L(26) = 5 + \frac{1}{10}(26 - 25)$$

$$= 5.1$$

Tanım : (Diferansiyel)

$y=f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon, dx bağımsız bir değişken (x bağımsız değişkeninin diferansiyeli) olmak üzere

$$dy=f'(x)\,dx$$

ifadesine $y=f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli denir.

Ör/

- $y=x^5+37x \Rightarrow dy=(5x^4+37)\,dx$
- $y=\dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow dy=\left(\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)dx$

- $xy+x-2y=5 \Rightarrow dy=?$

$$y\,dx+x\,dy+dx-2dy=0$$

$$(x-2)\,dy=-(y+1)\,dx$$

$$dy=\frac{-(y+1)}{x-2}\,dx$$

$$=-\frac{\left(\frac{5-x}{x-2}+1\right)}{x-2}\,dx$$

$$=-\frac{3}{(x-2)^2}\,dx$$

$$(x-2)y=5-x$$

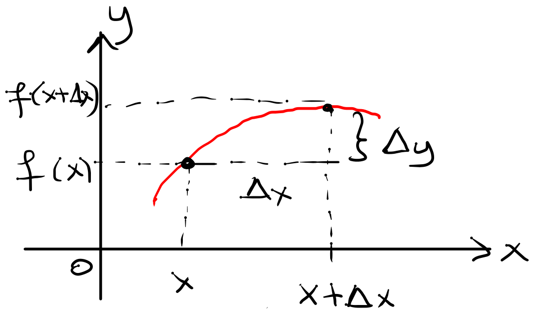
$$y=\frac{5-x}{x-2}$$

$$dy=\frac{-(x-2)-(5-x)}{(x-2)^2}\,dx$$

$$=\frac{-3}{(x-2)^2}\,dx$$

Diferansiyel ile yaklaşık hesaplama

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad \Big\}$$ bağımsız değişkenin Δx artımına karşın fonksiyonun artımı.

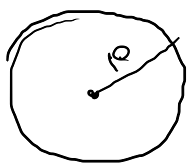


$$\Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y$$

$$dx = \Delta x \;, \quad dy \cong \Delta y \Rightarrow f(x+\Delta x) \cong f(x) + dy$$

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\underbrace{dx}_{\Delta x}$$

Ör/ Bir çemberin yarıçapı r, 10 m'den 10.1 m'ye artıyor. Çemberin alanındaki artışı tahmin etmek için dA diferansiyelini kullanın. Büyüyen çemberin alanını tahmin edin ve bunu gerçek alanla karşılaştırın.



$$A(r) = \pi r^2 \qquad 10.1 - 10 = 0.1 = dr$$

$$dA = A'(r) \cdot dr$$
$$= 2\pi r \, dr$$
$$= 2\pi \cdot 10 \cdot (0.1) = 2\pi \ m^2$$

$$A(10+0.1) \cong A(10) + dA$$
$$\cong 100\pi + 2\pi$$
$$\cong 102\pi \ m^2$$

$$\Delta A - dA = (102.01 - 102)\pi = 0.01\pi \ m^2$$

$$A(10.1) = \pi \cdot (10.1)^2 = 102.01\pi \ m^2$$

Ör/ $\sin 29^\circ \cong ?$ (Diferansiyel ile)

$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x \qquad f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

$$\underbrace{\sin(30^\circ-1^\circ)}_{f(x+\Delta x)} \cong \sin(30^\circ) + \cos(30^\circ).(-1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{-\pi}{180}\right)$$

$$\Rightarrow \sin 29^\circ \cong \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-\pi}{180}\right)$$

$x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

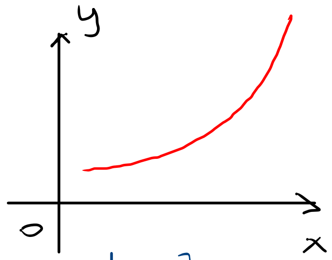
$\Delta x = -1^\circ = \frac{-\pi}{180}$

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

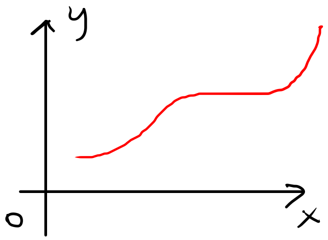
Teorem: J açık bir aralık, I ise J'nin tüm noktalarından oluşan bir aralık olsun. (I, J'nin uç noktalarını içerebilir ya da içermeyebilir)

f, fonksiyonu I aralığı üzerinde sürekli ve J aralığı üzerinde türevlenebilir olsun. O zaman eğer her $x \in J$ için

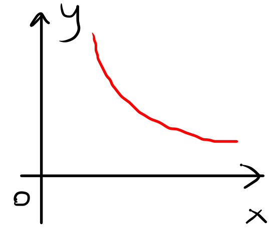
- $f'(x) > 0$ ise, f, I üzerinde kesin artan
- $f'(x) \geq 0$ ise, f, I üzerinde artan (azalmayan)
- $f'(x) < 0$ ise, f, I üzerinde kesin azalan
- $f'(x) \leq 0$ ise, f, I üzerinde azalan (artmayan)



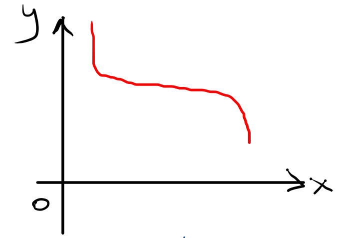
kesin artan



azalmayan



kesin azalan



artmayan

Ör/ $f(x)=x^3-12x+1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$D(f): \mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-12$

$3x^2-12=0$

$3(x^2-4)=0$

$x=-2 \quad x=2$

x	$-\infty$	-2		2	∞
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

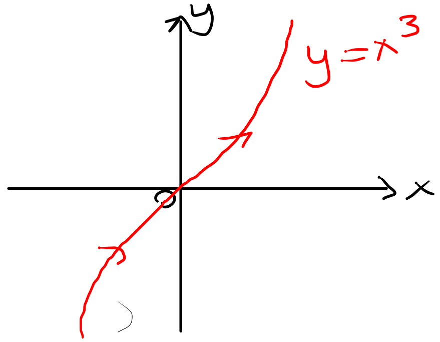
Fonksiyon $[-2,2]$ aralığında azalan $(-\infty,-2]$, $[2,\infty)$ aralıklarında artan bir fonksiyondu

NOT: Bir f fonksiyonu verildiğinde eğer $f'(x)\geq 0$ (veya $f'(x)\leq 0$) ise fonksiyon yine de kesin artan (veya kesin azalan) olabilir, yani azalmayan (veya artmayan) olması gerekmez)

Örneğin; $f(x)=x^3$ $(-1;1)$ aralığında $x\neq 0$ ise $f'(x)=3x^2>0$'dır.
$f'(0)=0$'dır.

$x_1 < x_2 \leq 0$ veya $0 \leq x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ 'dir.

$x_1 < 0 < x_2$ ise $f(x_1) < f(0) = 0 < f(x_2)$ olacaktır. O halde x^3 kesin artan bir fonk.'dur.



Teorem: Eğer f fonksiyonu bir I aralığında sürekli ve aralığın her iç noktasında $f'(x)=0$ ise o zaman her $x \in I$ için $f(x)=c$ 'dir. ($c \to$ sbt)

TERS FONKSİYONLARIN TÜREVİ

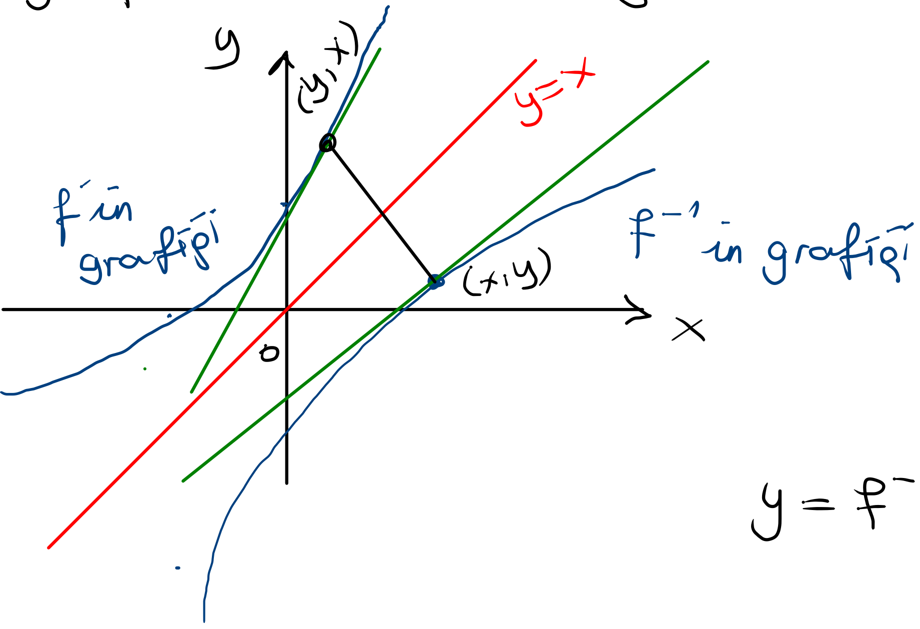
Bir f fonksiyonunun bir (a,b) aralığında türeve sahip ve bu aralık için $f'(x)>0$ veya $f'(x)<0$ olduğunu kabul edelim.

$f'(x)>0$ durumunda f fonksiyonu (a,b) aralığında kesin artan

$f'(x)<0$ durumunda ise f fonksiyonu (a,b) aralığında kesin azalandır.

Dolayısıyla f fonksiyonu (a,b) aralığındaki farklı noktalar için farklı değerler alır, bu ise fonksiyonun 1-1 olduğunu gösterir. O halde f'in tersi vardır.

$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y) \quad (a < y < b)$



$f'(x) \neq 0$ kabul ettiğimiz için $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki herhangi bir x noktasındaki teğeti x-eksenine dik bir doğru olamaz. Dolayısıyla f^{-1} fonksiyonu da bu x noktalarında türeve sahiptir.

$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y)$$

x'e göre kapalı türev alırsak;

$$1 = y' \cdot f'(y) \Rightarrow y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x} = \frac{1}{\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}}$$

f^{-1}'in tanım kümesinden

Ör/ $f(x)=x^3+x$ fonksiyonunun bire-bir olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(\underbrace{10}_{x})=?$

$D(f)=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2+1>0 \Rightarrow f$ kesin artan bir fonk. f^{-1} vardır.

$y=f^{-1}(x) \Rightarrow x=f(y) \Rightarrow x=y^3+y$ $\Big\} x=10 \Rightarrow y^3+y=10 \Rightarrow y=2$

kapalı türev alalım;

$1=3y^2y'+y'$

$\Rightarrow y'=\dfrac{1}{3y^2+1} \Rightarrow y'\Big|_{x=10}=\dfrac{1}{3y^2+1}\Big|_{y=2}=\dfrac{1}{13}$

Ör/ $f(x)=1+2x^3 \Rightarrow (f^{-1})'(x)=?$

$y=f^{-1}(x) \Rightarrow x=f(y) \Rightarrow x=1+2y^3$

$x=1+2y^3 \Rightarrow y^3=\dfrac{x-1}{2}$

$y=\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^{1/3}$

kapalı türev alırsak;

$1=6y^2y' \Rightarrow y'=\dfrac{1}{6y^2}=\dfrac{1}{6\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2/3}}$

Teorem: f, açık bir I aralığında türevlenebilen artan (veya azalan) bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f^{-1} ters fonksiyonu $f'(x_0) \neq 0$ olacak şekilde bir x_0 değeri için $y_0 = f(x_0)$'da türevlenebilirdir ve

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ dır.}$$

Transandant Fonksiyonların Türevleri

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Türevleri

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \;, \quad \lim_{n\to 0} (1+n)^{1/n} = e \right)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Üstel Fonk: $y = a^x \quad (a>0, a\neq 1)$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x\left[a^h-1\right]}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{a^x \cdot t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{a^x}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{a^x}{\log_a(1+t)^{1/t}} = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \cdot \ln a$$

$a^h - 1 = t$

$a^h = 1+t$

$h = \log_a(1+t)$

$h \to 0 \quad t \to 0$

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x . \ln a$

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x . \ln e = e^x$

$u = u(x)$ olm. üzere

$y = a^u \Rightarrow y' = u' . a^u . \ln a$

$y = e^u \Rightarrow y' = u' . e^u$

Logaritma Fonk.

$a > 0,\ a \neq 1$ olm. üzere

$y = \log_a x$ şeklindeki fonk.

$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

kapalı türev alırsak;

$1 = y' . a^y . \ln a$

$y' = \frac{1}{a^y . \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$

$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$

$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$

$u = u(x)$ olm. üzere

$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u . \ln a}$, $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

Örnekler :

1) $y = 2^{(x^2+3x)} \Rightarrow y' = (2x+3) . 2^{(x^2+3x)} . \ln 2$

2) $y = \sqrt{1+e^{2x}} \Rightarrow y' = \frac{\cancel{2} e^{2x}}{\cancel{2}\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

3) $y = e^{at} \Rightarrow y^{(n)} = ?$

$y' = a e^{at}$

$y'' = a^2 e^{at}$

$y''' = a^3 e^{at}$

$\vdots$

$y^{(n)} = a^n e^{at}$

Örnekler :

1. $y=\log_2(x^2+1) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{(x^2+1).\ln 2}$

2. $y=\ln|\cos x| \Rightarrow y' = \dfrac{-\sin x.\dfrac{\cos x}{|\cos x|}}{|\cos x|} = \dfrac{-\sin x.\cos x}{|\cos x|^2} = \dfrac{-\sin x.\cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} = -\tan x$

3. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow y' = \dfrac{1+\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}\,\cancel{(x+\sqrt{x^2+1})}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}\cdot\frac{|x+h|+|x|}{|x+h|+|x|} = \lim_{h\to 0}\frac{|x+h|^2-|x|^2}{(|x+h|+|x|).h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h(|x+h|+|x|)} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}(|x+h|+|x|)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{|x+h|+|x|} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}|x|} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

Ör/ $f(x)=x^{\pi}-\pi^{x}$ fonksiyonunun grafiğinin $x=\pi$'de negatif eğime sahip olduğunu gösteriniz.

$$f'(x)=\pi . x^{\pi-1}-\pi^{x} . \ln\pi$$

$$f'(\pi)=\pi.(\pi)^{\pi-1}-\pi^{\pi} . \ln\pi$$

$$=\underbrace{\pi^{\pi}}_{>0}\underbrace{(1-\ln\pi)}_{\overset{?}{<}0}$$

$$\pi>e$$

$$\ln\pi>\ln e=1$$

$$1-\ln\pi<0$$

$$\Rightarrow f'(\pi)<0$$

Logaritmik Türetme

$f(x)>0$ olmak üzere $y=[f(x)]^{g(x)}$ şeklindeki bir fonksiyonun türevi için kullandığımız yönteme Logaritmik türetme denir.

$$y=[f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y=\ln[f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y=g(x).\ln(f(x))$$

y, x'e bağlı bir fonk. olmak üzere türev alınırsa;

$$\frac{y'}{y}=g'(x).\ln[f(x)]+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{y'}{y} = g'(x).\ln[f(x)] + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = y.\left[g'(x).\ln[f(x)] + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$\Rightarrow y' = [f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\ln[f(x)] + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Ör/ $y = x^x \Rightarrow y' = ?$

$$\ln y = \ln(x^x) \Rightarrow \ln y = x.\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x.\frac{1}{x} \Rightarrow y' = y.[\ln x + 1] \Rightarrow y' = x^x[\ln x + 1]$$

Ör/ $y = (\sin x)^{\ln x}$ $(0 < x < \pi) \Rightarrow y' = ?$

$$\ln y = \ln[(\sin x)^{\ln x}] \Rightarrow \ln y = \ln x.\ln \sin x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}.\ln \sin x + \ln x.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = (\sin x)^{\ln x}\left[\frac{\ln \sin x}{x} + \ln x.\cot x\right]$$

NOT : Logaritmik türetme birçok fonksiyonun çarpımı ve bölümü olarak ifade edilen fonksiyonların türevini bulmak için de kullanışlıdır. Logaritma ile çarpım ve bölümlerden oluşan ifade toplam ve farklarla belirlenir.

Ör/ $y = \dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4} \Rightarrow y' = ?$

$$\ln y = \ln\left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}\right] \Rightarrow \ln y = \ln(x+1) + \ln(x+2) + \ln(x+3) - \ln(x+4)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$\Rightarrow y' = \left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}\right]\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right]$$

Öd/ $y = \sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)} \Rightarrow y'\Big|_{x=1} = ?$

Teorem: $x>0$ ise $\ln x \leq x-1$ dir. $D(f)=\mathbb{R} \Rightarrow D(g):(0,\infty)$

İSPAT: $x>0$ için $g(x)=\ln x-(x-1)$ olsun. $\rightarrow D(h)=(0,\infty)$ $g(1)=0$

$$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

$\frac{1-x}{x}>0$ $\quad 0<x<1 \rightarrow$ artan

$\frac{1-x}{x}<0$ $\quad x>1 \rightarrow$ azalan

$x>0$ için $g(x)\leq g(1)=0 \Rightarrow \ln x-(x-1)\leq 0 \Rightarrow \ln x \leq x-1$

Teorem: $a>0$ olmak üzere

1°) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$, 2°) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0$, 3°) $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|^a\cdot e^x=0$; 4°) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\cdot\ln x=0$

Teorem: Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ 'dir.