Uygulama (Devam)

1) $$f(x)=\begin{cases} c-d\,\mathrm{arccot}\,(x+1), & x<0 \\ \arccos x, & 0\le x\le 1 \\ c+d\arctan(2-x), & x>1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli olduğu bilinmektedir. Buna göre c ve d sayılarını bulunuz.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(c-d\,\mathrm{arccot}(x+1)\right)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arccos x$$

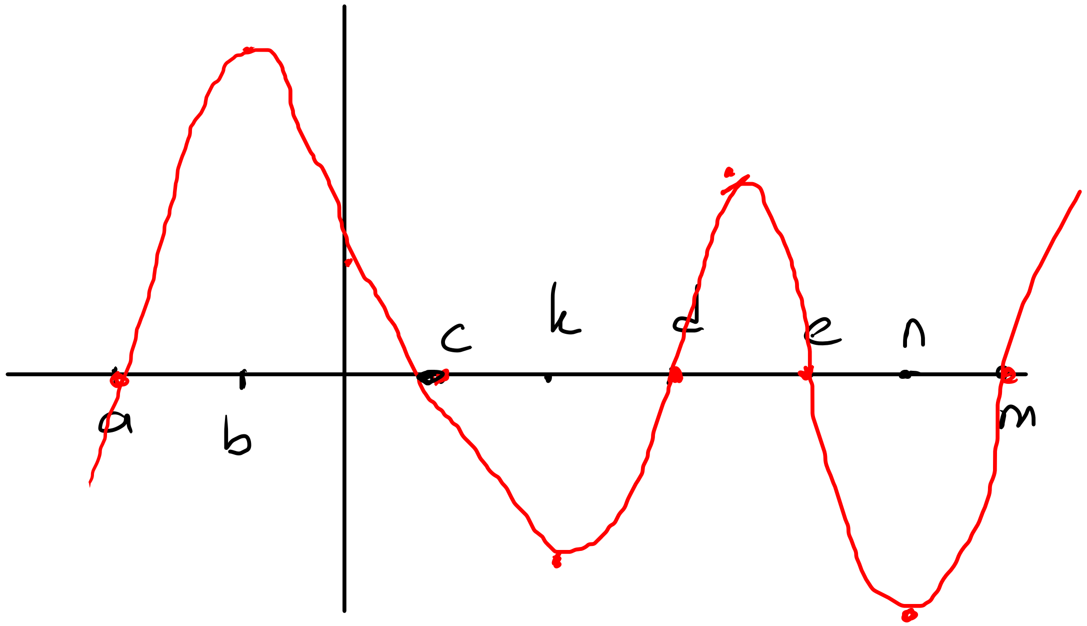
$$c-d\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(c+d\arctan(2-x)\right)=\lim_{x\to 1^-}\arc\cos x$$

$$c+d\cdot\frac{\pi}{4}=0$$

$$c-d\pi/4=\pi/2$$
$$c+d\pi/4=0$$

$$c=\frac{\pi}{4},\ d=1$$

2) 

Şekilde grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) f, (e,n) aralığında artandır.

b) f, (b,c) " azalandır.

c) f, (c,k) " artandır.

d) f, (k,d) " azalandır.

e) f, (d,m) " artandır.

3) $f(x)=\ln(x+5) \Rightarrow f^{(54)}(0)=?$

$f'(x)=\dfrac{1}{x+5}$ $\qquad f'''(x)=\dfrac{2}{(x+5)^3}$ $\qquad f^{(5)}(x)=\dfrac{4.3.2}{(x+5)^5}$

$f''(x)=\dfrac{-1}{(x+5)^2}$ $\qquad f^{(4)}(x)=\dfrac{-3.2}{(x+5)^4}$ $\qquad \vdots$

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!\,(-1)^{n+1}}{(x+5)^n} \quad n\geq 1$

$$f^{(54)}(0) = \frac{(-1)^{55}\, 53!}{5^{54}} = \frac{-53!}{5^{54}}$$

4) $y = \sqrt[3]{\arcsin(4-x) + x^2 \ln(4-x)}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$$-1 \le 4-x \le 1 \qquad\qquad 4-x > 0$$

$$-5 \le -x \le -3 \qquad\qquad x < 4$$

$$3 \le x \le 5$$

$$\left.\right\} D(f) = [3,4)$$

5) $x\cos(3y) = 2y\sin 3x$ denklemi ile kapalı olarak verilen $y=f(x)$ fonk. için $y'\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ türev değerini bulunuz.

$$\cos(3y) - 3xy'\sin(3y) = 2y'\sin 3x + 6y\cos 3x$$

$$y'\left[2\sin 3x + 3x\sin(3y)\right] = \cos(3y) - 6y\cos 3x$$

$$y'[\pi] = (\pi)(-1) \Rightarrow y' = \cancel{1}$$

6) $\lim_{x\to\pi^-} \cot x \cdot \ln(2+\cos x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to\pi^-} \dfrac{\cos x \ln(2+\cos x)}{\sin \cancel{x}}$

$$\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\pi^-} \dfrac{-\sin x \cdot \ln(2+\cos x) + \cos x \cdot \dfrac{-\sin x}{2+\cos x}}{\cos x}$$

$$= \frac{0}{-1} = 0$$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2}$ fonksiyonu hangi x değerleri için süreksizdir? Süreksiz ise çeşidini belirleyin.

$$\sqrt{x^2+3}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3}=2$$

$$x^2+3=4 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{(3x^2+1-4)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3-4)(\sqrt{3x^2+1}+2)}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\(1)}} \frac{(3x^2+1-4)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3-4)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{3(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}$$

$$= \frac{3.4}{4} = 3$$

$f(1) = f(-1) = 3$ olarak tanımlanırsa süreksizlik ortadan kalkar.

$u = u(x) \Rightarrow (\log_a u)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$, $(\sin u)' = u'.\cos u$

8) $f(x) = (\log_5 \sqrt{x})\sin(x^e)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}.\ln 5}\sin(x^e) + (\log_5 \sqrt{x}).e.x^{e-1}.\cos(x^e)$$

$$= \frac{1}{2x\ln 5}\sin(x^e) + \log_5 \sqrt{x}).e.x^{e-1}\cos(x^e)$$

9) Aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur.

a) fonksiyon bir noktada sürekli ise o noktada türevlenebilirdir.

b) fonksiyon bir noktada süreksiz ise o noktada limiti mevcut değildir.

c) fonksiyon bir noktada türevlenebilir ise o noktada limiti mevcuttur.

d) fonksiyonun bir noktada limiti mevcutsa o noktada türevlenebi-lirdir.

e) fonksiyon süreksiz olduğu bir noktada türevlenebilirdir.

10) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1-\sqrt{2+\cos x}}{1-\sqrt{1+\sin x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\left(1-\sqrt{2+\cos x}\right)\left(1+\sqrt{2+\cos x}\right)}{\left(1-\sqrt{1+\sin x}\right)\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)} \cdot \dfrac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{[1-(2+\cos x)]\left[1+\sqrt{1+\sin x}\right]}{[1-(1+\sin x)]\left[1+\sqrt{2+\cos x}\right]}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{\cancel{-}(1+\cos x)\left[1+\sqrt{1+\sin x}\right]}{\cancel{-}\sin x\left[1+\sqrt{2+\cos x}\right]}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{\overbrace{(1-\cos^2 x)}^{\sin^2 x}\left[1+\sqrt{1+\sin x}\right]}{\cancel{\sin x}(1-\cos x)\left[1+\sqrt{2+\cos x}\right]}$$

$$= \frac{0}{4} = 0$$

11) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=1+x+\ln(1+x^2)$ tersinin mevcut olduğunu gösterip $(f^{-1})'(\underset{\downarrow x}{1})=?$ $D(f)=[0,\infty)$

$f'(x)=1+\dfrac{2x}{1+x^2}>0$ $\forall x\in D(f)$ için $f'(x)>0 \Rightarrow$ 1-1 ve tersi vardır.

$1=1+x+\ln(1+x^2)$ $x=0$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

12) f fonksiyonu $x=1$ de türeve sahip bir fonksiyon olduğuna göre

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}=3f'(1)$ olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+h)-f(1)}{h} - \frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)\right]$$

$$= f'(1) - (-2)f'(1)$$

$$= 3f'(1)$$

13) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & x<0 \\ x^2+\dfrac{1}{2} & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$'da türevlenebilir midir?

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-x)}{x\left[1+\sqrt{1-x}\right]} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1-\sqrt{1-h}}{h} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1 - \sqrt{1-h} - \frac{h}{2}}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\left[1 - \frac{h}{2} - \sqrt{1-h}\right]\left[1 - \frac{h}{2} + \sqrt{1-h}\right]}{h^2\left[1 - \frac{h}{2} + \sqrt{1-h}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(1-\frac{h}{2}\right)^2 - (1-h)}{h^2\left[1 - \frac{h}{2} + \sqrt{1-h}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\cancel{h^2}}{4} - \cancel{h} + \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{h}}{\cancel{h^2}\left[1 - \frac{h}{2} + \sqrt{1+h}\right]}$$

$$= \frac{1/4}{2} = \frac{1}{8}$$

14) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonk ve $g(2) = -4$, $g'(x) = \sqrt{x^2+5}$ olsun. Lineer yaklaşımı kullanarak $g(2.05)$ in yaklaşık değerini hesaplayınız.

$$L(x) = g(a) + g'(a)(x-a) \qquad g'(2) = 3$$

$$g(2.05) \cong L(2.05) = g(2) + g'(2)(2.05-2)$$

$$= -4 + 3(0.05)$$

$$= -4 + 0.15$$

$$= -3,85$$

15) $g(1) = g'(1) = 4$ olm. üzere $f(x) = \dfrac{g(x^2)}{1+x^2}$ olsun

$f(1,25) \cong ?$

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$f(1) = \frac{g(1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f'(x) = \frac{(2x) \cdot g'(x^2)(1+x^2) - 2x \cdot g(x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2 \cdot g'(1) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot g(1)}{4}$$

$$= \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 4}{4} = 2$$

$$L(x) = 2 + 2(x-1)$$

$$f(1{,}25) \cong L(1{,}25) = 2 + 2 \cdot (0{,}25) = 2{,}5$$

16) $f[g(x)] = x$ ve $f'(x) = 1 + [f(x)]^2 \Rightarrow g'(x) = ?$

$$\{f[g(x)]\}' = 1 \Rightarrow g'(x) \cdot f'[g(x)] = 1$$

$$f'[g(x)] = 1 + [f[g(x)]]^2 = 1 + x^2 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

17) $f(x) = \dfrac{1 - \arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-2x}} \Rightarrow D(f) = ?$

$-1 \leq 2 - x \leq 1$

$-3 \leq -x \leq -1$

$1 \leq x \leq 3$

$x^2 - 2x > 0$

$x(x-2) > 0$

$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

	0		2	
x	$-$	$+$		$+$
$x-2$	$-$	$-$		$+$
	$+$	$-$		$+$

$D(f) : (2, 3]$

18) $f(t) = t^3 + 7t + 21$ $\quad f'(t) = 3t^2 + 7$

$f(-2) = -1$ olsun. $f^{-1}(t)$ fonksiyonunun $t = -1$ deki teğet doğrusunu bulunuz.

$f^{-1}(t)$ 'nin teğet doğrusu : $y = \underbrace{f^{-1}(-1)}_{-2} + [f^{-1}(-1)]'(t+1)$

$[f^{-1}(-1)]' = \dfrac{1}{f'(-2)} = \left.\dfrac{1}{3t^2+7}\right|_{-2} = \dfrac{1}{19} \Rightarrow y = -2 + \dfrac{1}{19}(t+1)$

19) $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow (f^{-1})'(0) = ?$

$\downarrow y$

$$0 = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x = -1$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x)}{1+x^2}$$

$$= \frac{\frac{1+x^2 - x(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1-x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{(2)^{3/2}}}$$

$$= \sqrt{2}$$

20) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2} = ?\quad (x>0)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left[\dfrac{(x+h)(x-h)}{x^2}\right]}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x^2-h^2}{x^2}\right)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \cdot \ln\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-x^2}{-x^2} \cdot \frac{1}{h^2} \ln\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)$$

$h \to 0$

$-\dfrac{x^2}{h^2} \to \infty$

$-\dfrac{x^2}{h^2} = n$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-x^2}{h^2} \cdot \frac{1}{-x^2} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{-\frac{x^2}{h^2}}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1+\frac{1}{-\frac{x^2}{h^2}}\right]^{-\frac{x^2}{h^2}}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln e = -\frac{1}{x^2}$$