Teğetler ve Alanlar

Eğer f ve g fonksiyonları bir t noktasında türevlenebilir fonksiyonlar iseler $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ fonksiyonları da bu t noktasında türevlenebilirdirler. Eğer x ve y bir parametrik eğriyiyi gösteriyorsa bu türevlenebilir eğri üzerindeki bir noktada y'de x'in türevlenebilir fonksiyonu olduğunda $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}$ türevleri arasındaki ilişki zincir kuralı ile verilir.

$$y = f[g(x)] \Rightarrow y' = g'(x) \cdot f'[g(x)]$$

$$y = F(x) = F(f(t)) = g(\underline{\underline{t}})$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\dot{x}}} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

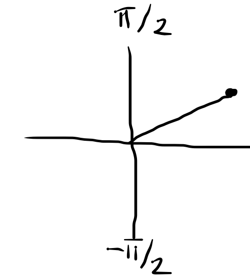
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} =$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x = \sec t \\ y = \tan t \end{array}\right\}$ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ parametrizasyonu ile verilen eğrinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \Rightarrow \sec t = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos t} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \mp 2k\pi \\ y = 1 \Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \mp 2k\pi \end{array}\right\} \quad t = \frac{\pi}{4}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sec^2 t}{\cancel{\sec t}\cdot\tan t} = \frac{1}{\sin t} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{1}{\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$\dot{y} = \sec^2 t$

$\dot{x} = \sec t \cdot \tan t$

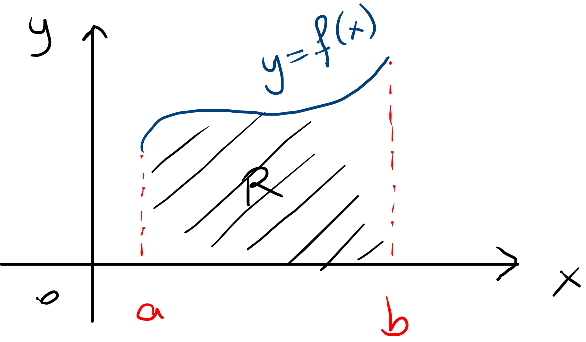
Ör/ $\left.\begin{array}{l} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{array}\right\}$ parametrik denklemleriyle verilen eğri için $y'' = ?$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = 1 - 2t \Rightarrow \ddot{x} = -2 \\ \dot{y} = 1 - 3t^2 \Rightarrow \ddot{y} = -6t \end{array}\right\} \; y'' = \frac{(-6t)\cdot(1-2t) - (-2)\cdot(1-3t^2)}{(1-2t)^3}$$

$$= \frac{-6t + 12t^2 + 2 - 6t^2}{(1-2t)^3}$$

$$= \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^3}$$



$$A=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} x&=f(t)\\ y&=g(t)\end{aligned}\right\}\ \alpha\le t\le\beta \implies \begin{aligned} a&\to t_1\in[\alpha,\beta]\\ b&\to t_2\in[\alpha,\beta]\end{aligned}$$

$$dx=\dot{x}\,dt$$

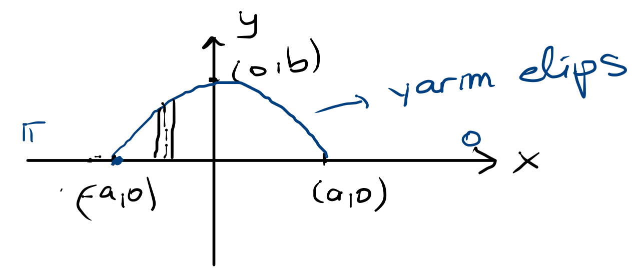
$$A=\int_{t_1}^{t_2} g(t)\cdot\underbrace{\dot{x}}_{f_t'(t)}\,dt$$

Ör/ $\left.\begin{aligned} x&=a\cos t\\ y&=b\sin t\end{aligned}\right\}\ 0\le t\le\pi$ şeklinde parametrize edilen bölgenin alanını bulunuz.

$dx=\dot{x}\,dt=-a\sin t\,dt$

$x=a\cos t$
$y=b\sin t$

$t=0$	$t=\pi$	$t=\pi/2$
$x=a$	$x=-a$	$x=0$
$y=0$	$y=0$	$y=b$



$$A=\int_\pi^0 b\sin t\,(-a\sin t)\,dt$$

$$=a.b\int_0^\pi \sin^2 t\,dt=a.b\int_0^\pi \frac{(1-\cos 2t)}{2}\,dt$$

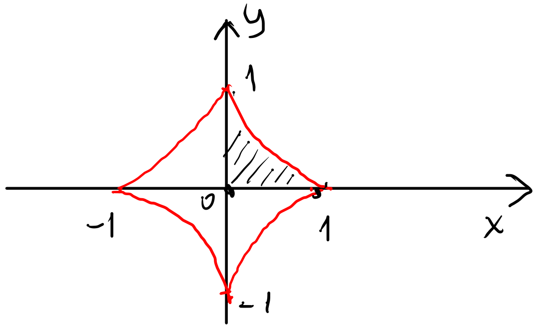
$$=\frac{ab}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\,\Big|_0^\pi\right]$$

$$=\frac{ab}{2}\left[(\pi-0)-\frac{1}{2}\cancelto{0}{(\sin 2\pi-\sin 0)}\right]=\frac{ab\pi}{2}\,br^2$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{array}\right\}$ $0\le t\le 2\pi$ şeklinde parametrize edilen astroid eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

$y^{2/3}=1-x^{2/3} \Rightarrow y=(1-x^{2/3})^{3/2}$

$\left.\begin{array}{l} x^{1/3}=\cos t \\ y^{1/3}=\sin t \end{array}\right\} \Rightarrow x^{2/3}+y^{2/3}=\cos^2 t+\sin^2 t=1 \Rightarrow x^{2/3}+y^{2/3}=1$ astroid eğrisinin kartezyen denklemi



$$A=4\int_0^1 y\,dx$$

$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos^3 t=0 \Rightarrow \cos t=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \\ \sin^3 t=1 \Rightarrow \sin t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array}\Bigg\}\ t_1=\frac{\pi}{2}$

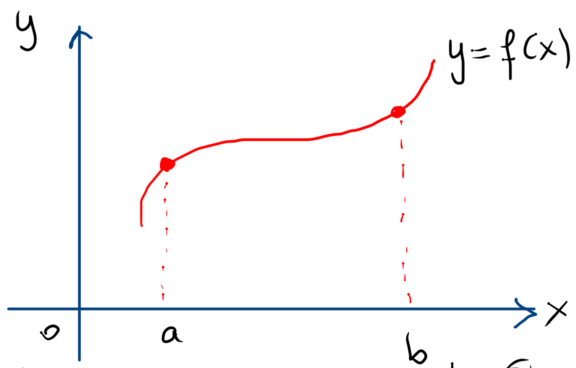
$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos^3 t=1 \Rightarrow \cos t=1 \Rightarrow t=0,2\pi \\ \sin^3 t=0 \Rightarrow \sin t=0 \Rightarrow t=0,\pi,2\pi \end{array}\Bigg\}\ t_2=0$

$dx=3\cos^2 t.(-\sin t).dt$

$$A=4\int_{\pi/2}^{0}\sin^3 t.\left[3\cos^2 t.(-\sin t)\right]dt=12\int_0^{\pi/2}\sin^4 t.\cos^2 t\,dt$$

$$=12\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2.\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{12}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)^2(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{3\pi}{8}\ br^2$$



parçasının uzunluğu

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\}\ \alpha\le t\le\beta$$

$a \to t_1 \in [\alpha,\beta]$

$b \to t_2 \in [\alpha,\beta]$

Eğer c eğrisi $\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\}\ \alpha\le t\le\beta$ parametrizasyonu ile tanımlanıyorsa ki burada $x(t)$ ile $y(t)$ $[\alpha,\beta]$ aralığında sürekli ve aynı anda sıfır olmayan fonksiyonlar ise t α'dan β'ya artarken c eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa bu durumda c eğrisinin $[a,b]\subset[\alpha,\beta]$

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left[\frac{\dot y}{\dot x}\right]^2}\cdot \dot x\,dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\frac{\dot x^2+\dot y^2}{\dot x^2}}\cdot \dot x\,dt$$

$$\boxed{s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt}$$

şeklinde hesaplanır.

Ör/ $\left.\begin{aligned} x&=r\cos t\\ y&=r\sin t\end{aligned}\right\}\ 0\le t\le 2\pi$ parametrizasyonu ile verilen r yarıçaplı çemberin uzunluğunu bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} \dot x&=-r\sin t\\ \dot y&=r\cos t\end{aligned}\right\}\Rightarrow s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} r\,dt = r\left(t\Big|_0^{2\pi}\right)=2\pi r\ \text{br}$$

Ör/ $\left.\begin{array}{l} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{array}\right\}$ $0\le t\le 2\pi$ parametrizasyonu ile verilen astroid eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} x^{\bullet}=3\cos^2 t.(-\sin t) \\ y^{\bullet}=3\sin^2 t.(\cos t) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{[3\cos^2 t.(-\sin t)]^2+[3\sin^2 t.\cos t]^2}\,dt$$

$$=12\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^4 t.\sin^2 t+\sin^4 t.\cos^2 t}\,dt$$

$$=12\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=12\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt$$

$\sin t=u$

$\cos t\,dt=du$

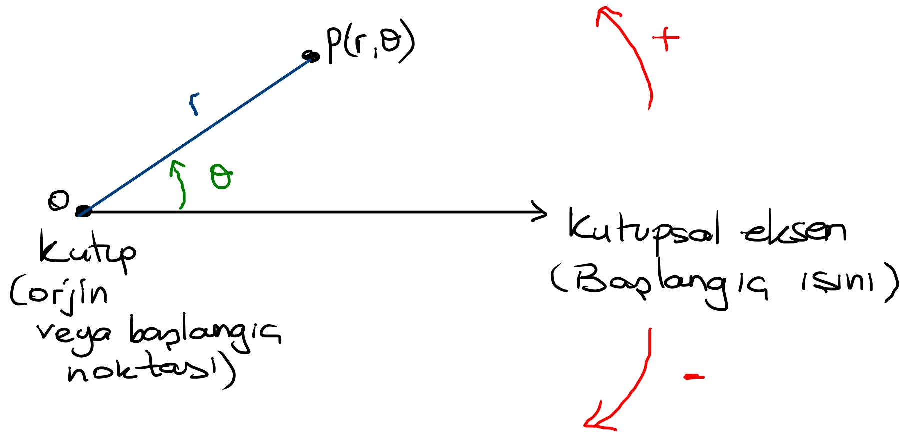
$t=0\Rightarrow u=0$

$t=\pi/2\Rightarrow u=1$

$$=12\int_0^1 u\,du=12.\frac{u^2}{2}\Big|_0^1=6\text{ br}$$

Kutupsal Koordinatlar

Kutupsal koordinatları tanımlamak için önce kutup (başlangıç noktası veya orjin) ve bir başlangıç ışını (kutupsal eksen) sabitleriz.



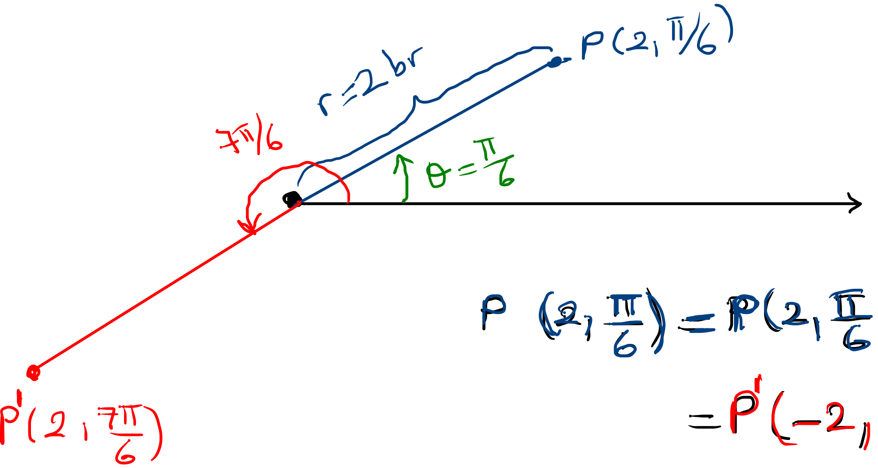
Kutupsal koordinat ikilisi (r, θ)

$\boxed{r = f(\theta)}$ → Kutupsal Denklem

r : Kutuptan P noktasına olan yönlü uzaklık

θ : Kutupsal eksenden OP'ye olan yönlü açı

Verilen bir nokta ile ilgili açı bir tane değildir. Düzlemdeki bir noktanın sadece bir çift kartezyen koordinatı olmasına karşın sonsuz miktarda kutupsal koordinat çifti vardır.



pozitif θ → saat yönünün tersinde

negatif θ → saat yönünde ölçülür.

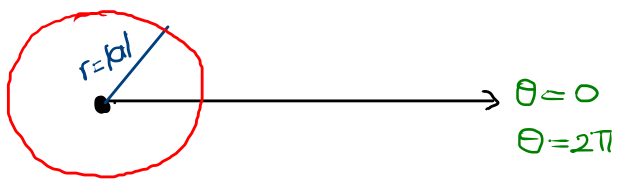
r'nin negatif değeri θ'nın hareketli kolu üzerinde ters yönde alınmış olan uzaklıktır.

$$P\left(2, \frac{\pi}{6}\right) = P\left(2, \frac{\pi}{6} \mp 2k\pi\right)$$

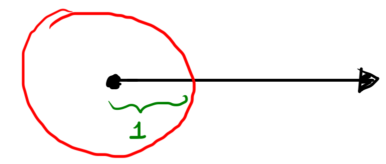
$$= P'\left(-2, \frac{7\pi}{6} \mp 2k\pi\right)$$

Kutupsal Denklemler ve Grafikleri

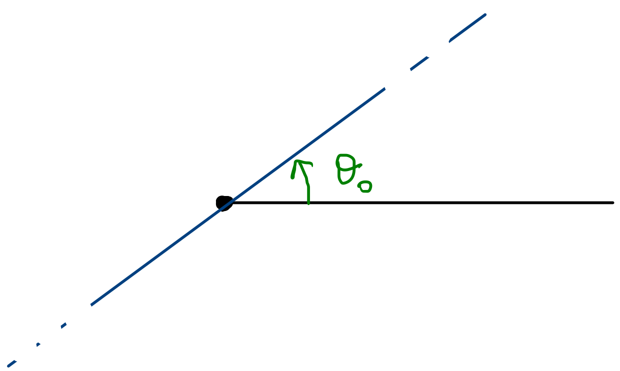
- $r = a \neq 0 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ → kutuptan $|a|$ birim uzaklıktaki noktaların kümesi



Ör/ $r = 1 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

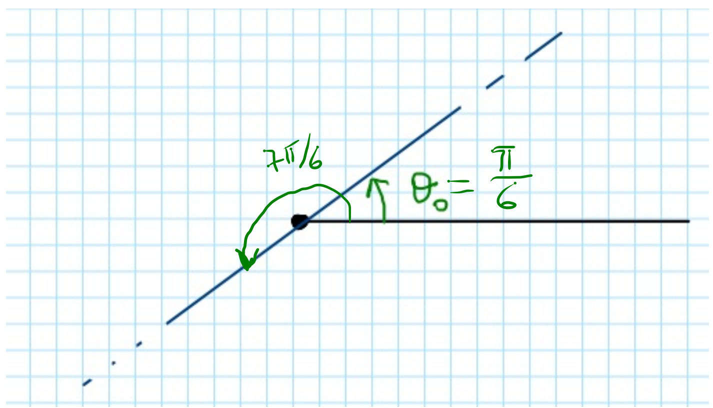


- $\theta = \theta_0$, $-\infty < r < \infty$ → Kutuptan geçen ve kutup ekseni ile pozitif yönde θ_0 açısı yapan bir doğru



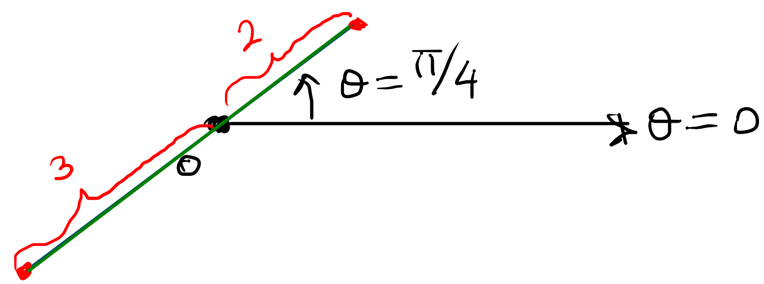
$\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$



- $1 \leq r \leq 2 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

- $-3 \leq r \leq 2 \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$



- $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \qquad -\infty < r < \infty$