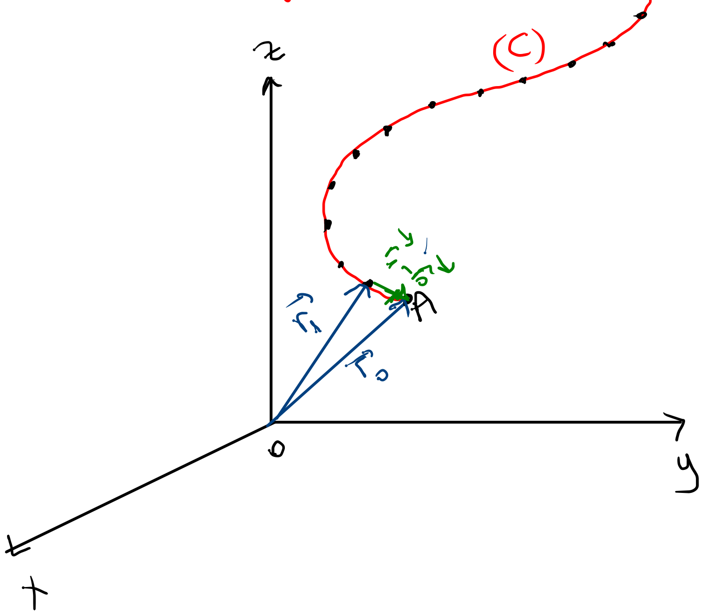
Yay uzunluğu



$$\Delta \vec r_i = \vec r_i - \vec r_{i-1}$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} |\vec r_i - \vec r_{i-1}| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\vec r_i - \vec r_{i-1}|}_{\Delta r_i} \cdot \frac{|\Delta t_i|}{|\Delta t_i|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \vec r_i}{\Delta t_i}\right| \cdot |\Delta t_i|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \vec r_i}{\Delta t_i}\right| \cdot |\Delta t_i|$$

$$= \int_A^B \left|\frac{d\vec r}{dt}\right| \cdot dt = \int_A^B \overbrace{|\vec v|\, dt}^{ds \to \text{yay diferansiyeli}}$$

$$= \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\; dt \quad (1)$$

C eğrisi sınırlı sürekli ve $\vec r(t) = x(t)\vec i + y(t)\vec j + z(t)\vec k$ ile tanımlanmış ($A \le t \le B$) bir eğri olsun. Yani C eğrisi sürekli türetilebilen $x(t)$ $y(t)$ ve $z(t)$ fonksiyonları ile parametrize edilmiş olsun. O zaman bu eğrinin uzunluğu (1) şeklinde tanımlıdır.

Ör/ $\vec{r}(t) = a.\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$ dairesel helixinin $(a,0,0)$ ve $(a,0,2\pi b)$ noktaları arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$x(t) = a\cos t$
$y(t) = a\sin t$
$z(t) = bt$

$$S = \int_{(a,0,0) \Rightarrow 0}^{(a,0,2\pi b) \Rightarrow 2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$(a,0,0) \to t_1$

$$\left.\begin{array}{l} a = a\cos t \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, \mp 2\pi, \mp 4\pi, \ldots \\ 0 = a\sin t \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \mp 3\pi, \ldots \\ 0 = bt \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\} t_1 = 0$$

$(a,0,2\pi b) \to t_2$

$$\left.\begin{array}{l} a = a\cos t \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, \mp 2\pi, \mp 4\pi, \ldots \\ 0 = a\sin t \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \mp 3\pi, \ldots \\ 2\pi b = bt \Rightarrow t = 2\pi \end{array}\right\} t_2 = 2\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -a\sin t \\ \frac{dy}{dt} = a\cos t \\ \frac{dz}{dt} = b \end{array}\right\} \Rightarrow S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,.\,t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\ \text{br}$$

Teğet birim vektör

Hız vektörü $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ bir $\vec{r}(t)$ noktasında (C) parametrik eğrisine teğettir ve orada eğrinin hangi yönde yönlendirildiğini gösterir. Hız vektörünün sıfırdan farklı olduğunu kabul ettiğimizden onu kendi uzunluğuna bölerek bir teğet birim vektör bulabiliriz.

$$\hat{\vec{T}} = \frac{d\vec{r}/dt}{\left| d\vec{r}/dt \right|}$$

Ör/ $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + t^2\vec{k}$ için teğet birim vektörünü bulunuz.

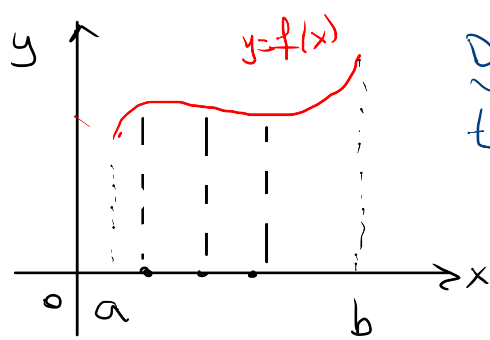
$$\vec{r}\,'(t) = -3\sin t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$$

$$\hat{\vec{T}} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{-3\sin t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}}{\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2}} = \frac{-3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{k}$$

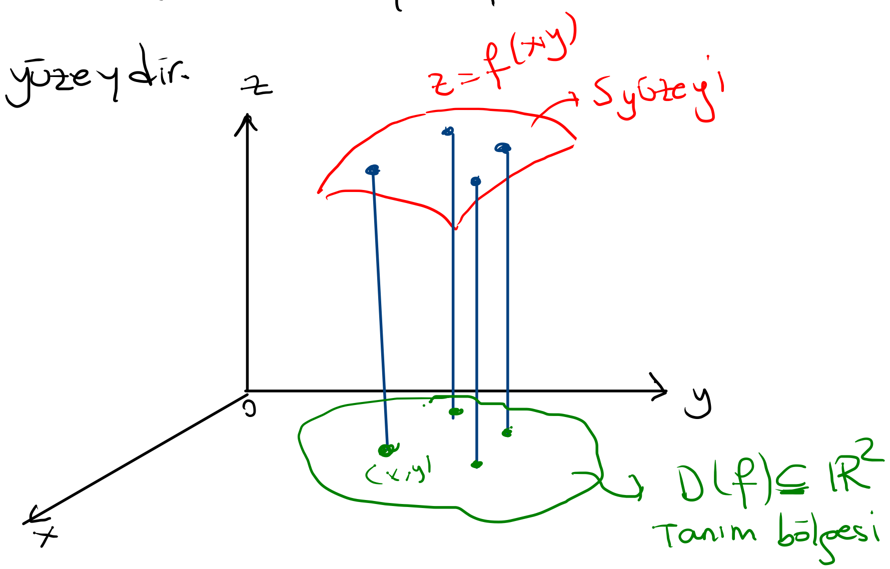
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Tanım: İki reel değişkenli bir f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$'nin bir $D(f)$ alt kümesindeki her bir (x,y) noktasına tek bir $f(x,y)$ reel sayısı karşılık getiren bir kuraldır. Burada $D(f)$ f'in tanım kümesi, tanım kümesindeki (x,y) noktalarından elde edilen $f(x,y)$ reel sayılarının kümesine de fonksiyonun görüntü kümesi ya da değer kümesi denir. İki değişkenli bir f fonksiyonunun grafiği (x,y) noktası fonksiyonun tanım kümesinde olmak üzere 3 boyutlu uzaydaki koordinatları $(x,y,f(x,y))$ olan noktaların kümesidir. Eğer $f(x,y)$ pozitif ise grafik fonksiyonun xy düzlemindeki tanım kümesinin üzerinde, $f(x,y)$ negatif ise de tanım kümesinin altında kalan $\mathbb{R}^3$'teki bir yüzeydir.

Üç değişkenli bir fonksiyonun grafiği 4 boyutlu uzayda bir hiper-yüzeydir.



$\underbrace{D(f)}_{\text{tanım kümesi}}=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$

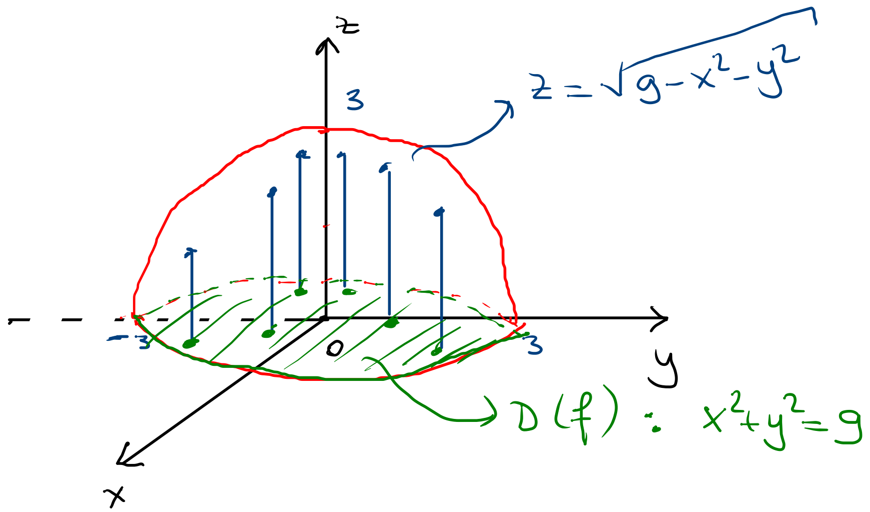


ÖRNEKLER

1) $z = f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

$z^2 = 9 - x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

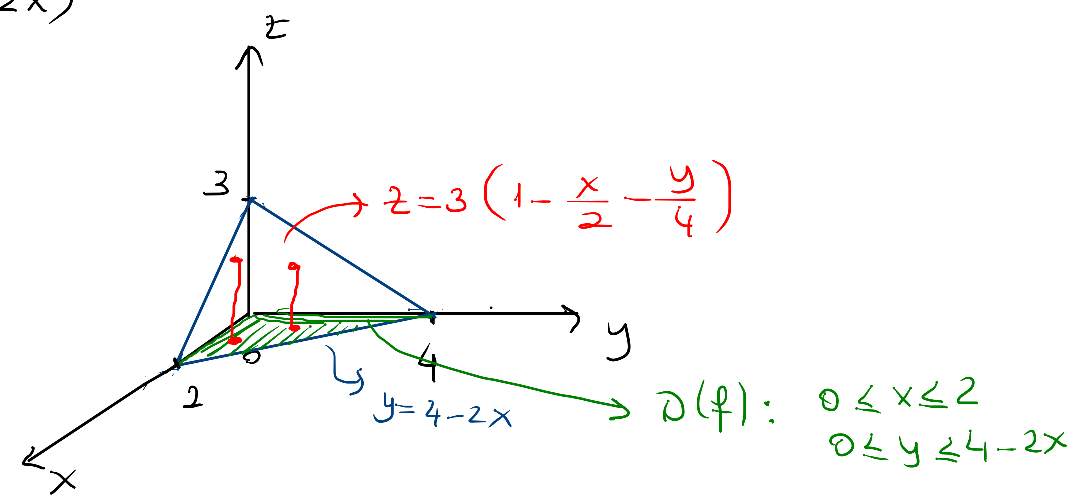


2) $z = f(x,y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$ $\quad (0 \le x \le 2\ ,\ 0 \le y \le 4-2x)$

$z = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$

$\frac{z}{3} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$

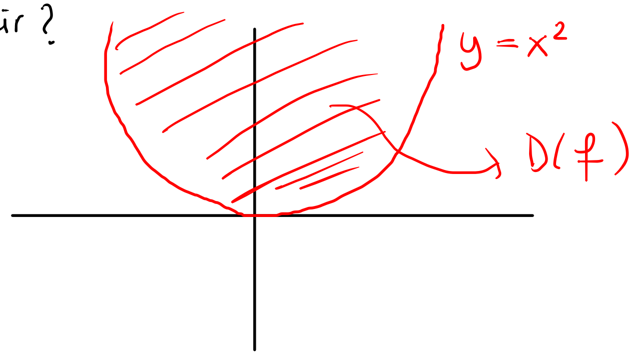
$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ kesen formunda düzlem denklemi



3) $z=\sqrt{y-x^2}$ Tanım kümesi nedir?

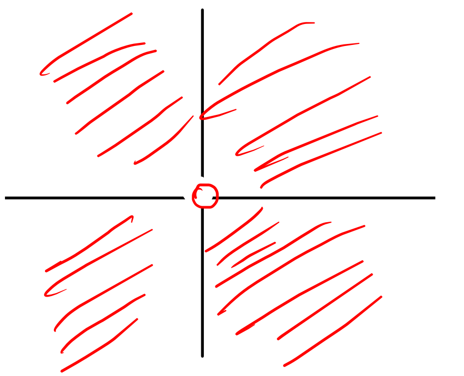
$y-x^2 \geq 0$

$y \geq x^2$



4) $z=\frac{1}{x.y}$

$x.y \neq 0$



5) $z=\sin(x.y) \rightarrow D(f)=\mathbb{R}^2$

$R(f)=[-1,1]$

6) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow D(f)=\mathbb{R}^3$

$x^2+y^2+z^2 \geq 0$ $R(f)=[0,\infty)$

7) $w=x.y.\ln z$ $D(f)$: üst yarı uzay

$z>0$ $R(f)$: $(-\infty,\infty)$

8) $z = \ln\left[x \cdot \ln(y-x)\right]$ Tanım kümesi nedir?

$x \cdot \ln(y-x) > 0$

1- durum

$x > 0$

$\ln(y-x) > 0$

$\downarrow$

- $y - x > 1$

  $y > 1 + x$

- $y - x > 0$

  $y > x$

2- durum

$x < 0$

$\ln(y-x) < 0$

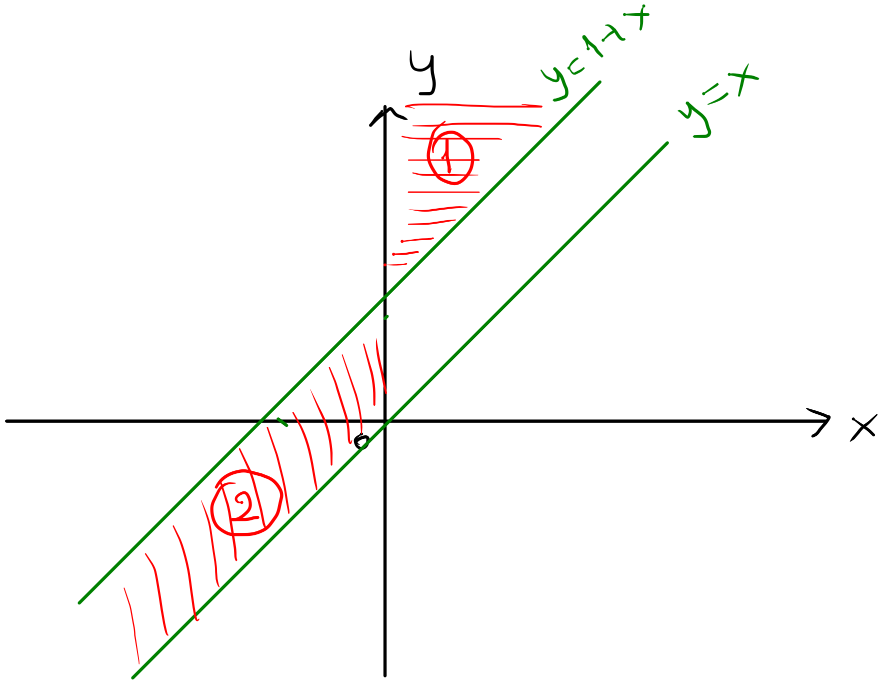
$\downarrow$

- $y - x < 1$

  $y < 1 + x$

- $y - x > 0$

  $y > x$

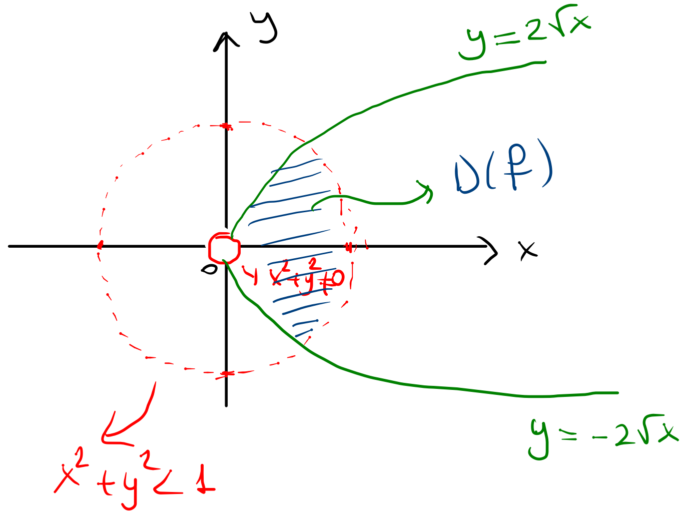


9) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ tanım kümesini bulup çiziniz.

$$4x-y^2\geq 0 \Rightarrow 4x\geq y^2 \Rightarrow -2\sqrt{x}\leq y\leq 2\sqrt{x}$$

$$\ln(1-x^2-y^2)\neq 0 \Rightarrow 1-x^2-y^2\neq 1 \Rightarrow x^2+y^2\neq 0$$

$$1-x^2-y^2>0 \Rightarrow x^2+y^2<1$$



Düzey (Seviye) Eğrileri

$f(x,y)$ fonksiyonunun grafik olarak temsil edilmesinin yöntemlerinden biri fonksiyon yüzeyinin iki boyutlu bir topografik haritasını çıkarmaktır. Bunun için xy-düzleminde c sabitinin çeşitli değerleri için $f(x,y)=c$ eğrilerini çizeriz. Bu eğrilere fonksiyonun seviye (düzey) eğrileri denir. Bunlar $z=f(x,y)$ grafiğinin yatay $z=c$ düzlemleriyle kesişimi olan eğrilerin xy-düzlemi üzerine olan dikey izdüşümleridir.

Ör/ $z=x^2+y^2$ fonksiyonunun grafiği ve seviye eğrileri

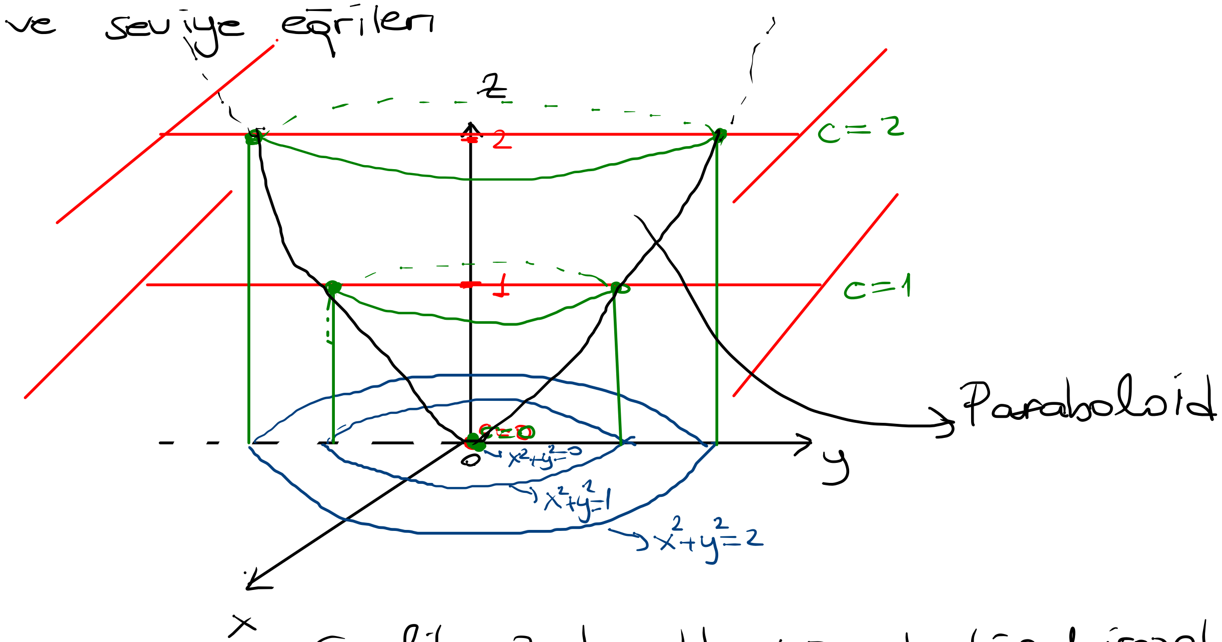
$f(x,y)=z=x^2+y^2 \qquad (f(x,y)=c)$

$c=0 \Rightarrow x^2+y^2=0 \qquad z=0$

$c=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \qquad z=1$

$c=2 \Rightarrow x^2+y^2=2 \qquad z=2$

$\vdots$



Grafik 3-boyutlu uzayda bir dairesel paraboloid

Seviye eğrileri ise xy-düzleminde orjin merkezli çemberlerdir.