Seriler için Bazı Teoremler

1) Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise o zaman $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$'dır. Ancak teoremin tersi doğru değildir.

Ör/ $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri daima ıraksaktır.

2) Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $N \geq 1$ tamsayısı için $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olmasıdır.

3) Eğer $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serileri yakınsak ise yani $\sum a_n = a$ ve $\sum b_n = b$ ise o zaman $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum \alpha a_n = \alpha a \quad , \quad \sum (a_n \mp b_n) = a \mp b$$ 'dir.

4) Eğer $\sum a_n$ ıraksak bir seri ise $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere $\sum \alpha a_n$ serisi de ıraksaktır.

5) Eğer $\sum a_n$ yakınsak ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum (a_n \mp b_n)$ serisi de ıraksaktır.

6) Eğer $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ ıraksak seriler ise $\sum (a_n \mp b_n)$ serisi ya yakınsaktır ya da ıraksaktır.

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\cdots = \sum a_n \to$ ıraksak

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1) = -1-1-1-\cdots = \sum b_n \to$ ıraksak

---

$\sum_{n=1}^{\infty} [1+(-1)] = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 0}_{=0} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) \to$ yakınsak.

7) Iraksaklık testi (n. terim testi)

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

ÖRNEKLER

1) Aşağıdaki serilerin toplamını bulunuz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{2^{n+1}}{3^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$

$a = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{3}$, $|r| = \frac{1}{3} < 1$ yak.

$a = \frac{4}{3}$, $r = \frac{2}{3}$, $|r| = \frac{2}{3} < 1$ yak.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

$a=4,\ r=\frac{1}{2},\ |r|=\frac{1}{2}<1$ yak.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$a=1$, $|r|=\frac{1}{2}<1$ yak. $\rightarrow \frac{a}{1-r}$

$a=1$, $|r|=\frac{1}{3}<1$ yak.

$= 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot r^{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$a_n = \frac{n}{2n-1}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan ıraksaklık testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisi ıraksaktır.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

NOT: n. terim testi alternatif serilerde genel terimin mutlak değerine uygulanır.

$a_n = (-1)^n \cdot n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n} \overset{0\cdot\infty}{=} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n}}_{\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = 1 \neq 0$ dır. O halde n. terim testine göre seri ıraksaktır.

$\overbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

$\frac{1}{n} = t \Rightarrow n\to\infty$, $t\to 0$

NOT: Pozitif terimli bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul serinin kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır.

Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri

Yakınsaklık testleri sadece serinin karakteri hakkında bilgi edinmemizi sağlar. Serinin toplamının ne olduğunu testler yardımıyla bulamayız.

1. İntegral Testi

Bu test, pozitif terimli bir serinin ona benzer şekilde davranan bir improper integralle karşılaştırmak suretiyle, serinin karakterini belirlememize yardımcı olur.

Teorem: f fonksiyonu, bir pozitif N tam sayısı için $[N,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve azalan bir fonksiyon olmak üzere $a_n = f(n)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\int_N^\infty f(t)dt$ yak ise seri yakınsak ıraksak ise seri ıraksaktır. ($N=1$ alınır)

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik serinin karakterini belirleyelim.

$a_n = \frac{1}{n} = f(n)$ $\quad D(f): \mathbb{R} - \{0\} \supset [1,\infty) \Rightarrow [1,\infty)$'da $f(n)$ süreklidir.

$f'(n) = \frac{-1}{n^2} < 0 \Rightarrow f(n)$ $[1,\infty)$'da azalan bir fonk.

$\Big\}$ İnt. Testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty}\frac{dn}{n}=\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{dn}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln|n|\,\Big|_1^{a}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln a-\cancel{\ln 1}^{\,0}\right]=\ln\infty=\infty \Rightarrow \text{Seri ıraksaktır.}$$

Ör/ (p-serisi) $(p>0)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ şeklindeki serilerdir.

$a_n=\frac{1}{n^p}=f(n)$ $\quad D(f): \mathbb{R}-\{0\}\supset[1,\infty) \Rightarrow [1,\infty)$ $f(n)$ süreklidir.

$f'(n)=-p\,n^{-p-1}<0 \Rightarrow f(n)$ azalandır.

int. testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty}\frac{dn}{n^p}=\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{dn}{n^p}=\lim_{a\to\infty}\left[\frac{n^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{a}\right]=\lim_{a\to\infty}\left[\frac{a^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right]=\begin{cases}\infty \text{ (ırak)} & p\leq 1 \text{ ise}\\ \frac{1}{p-1} \text{ (yak)} & p>1 \text{ ise}\end{cases}$$

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=f(n)$ $\quad [1,\infty)$'da $f(n)$ süreklidir.

$f'(n)=\dfrac{-1/n^2}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{-1}{n(n+1)}<0$ $\quad f(n)$ azalandır.

int. testi uygulanabilir.

$$\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) dn = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{u} \underbrace{dn}_{dv} = \lim_{a\to\infty} \left[n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big|_1^a - \int_1^a \frac{-\cancel{n}\,dn}{\cancel{n}(n+1)} \right]$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[a\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) - 1.\ln(1+1) + \left(\ln|n+1|\Big|_1^a\right) \right]$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[\underbrace{a\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)}_{0.\infty} - \ln 2 + \underbrace{\ln|a+1|}_{=\infty} - \ln 2 \right]$$

$$= 1 - 2\ln 2 + \infty$$

$= \infty \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = u$$

$$-\frac{dn}{n(n+1)} = du$$

$$dn = dv$$

$$n = v$$

$$\lim_{a\to\infty} a.\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{\frac{\cancel{-\frac{1}{a^2}}}{1+\frac{1}{a}}}{\cancel{-\frac{1}{a^2}}}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = 1$$

2) Karşılaştırma Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli karakteri belirlenmek istenen seri ve $\sum b_n$'de yine pozitif terimli karakterini bildiğimiz bir seri olsun. ($\sum b_n$ genel olarak ya bir geo seri ya bir p-serisi ya da harmonik seri olarak seçilir)

Teorem (Doğrudan karşılaştırma)

- Eğer $\forall n$ için $a_n \leq b_n$ ve $\sum b_n$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.
- Eğer $\forall n$ için $a_n \geq b_n$ ve $\sum b_n$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$a_n = \frac{5}{5n-1} = \frac{1}{\frac{5n-1}{5}} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n} = b_n \; (\forall n)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksaktır. O halde karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ serisi de ıraksaktır.

Ör) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$a_n = \frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} = \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2} = b_n \; (\forall n)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p-serisi $p=2>1$ yak.

O halde karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisi de yakınsaktır.

Öd/ $5+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+1+\frac{1}{2+\sqrt{1}}+\frac{1}{4+\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}+\dots$ serisinin karakterini belirleyiniz.