Kutupsal eğrinin uzunluğu

$r=f(\theta)$ $\quad \alpha\le\theta\le\beta$ eğrisinin uzunluğu için kutupsal koordinat formülünü aşağıdaki gibi parametrize ederek buluruz:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \qquad \alpha\le\theta\le\beta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \;,\quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]^2 + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]^2}\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2\cos^2\theta - \cancel{2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta} + [f(\theta)]^2\sin^2\theta + [f'(\theta)]^2\sin^2\theta + \cancel{2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta} + [f(\theta)]^2\cos^2\theta}\; d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\theta$$

Ör/ $r = 1-\sin\theta$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$D(f)=\mathbb{R}$ $\quad T=2\pi$ 'ye eşit uzunlukta eğri çizilebilir.

$\theta \to -\theta \Rightarrow r = 1-\sin(-\theta) = 1+\sin\theta \neq r$, $\neq -r$

$\theta \to \pi-\theta$ $\quad r = 1-\sin(\pi-\theta)$
$= 1 - [\cancel{\sin\pi\cos\theta}^{\,0} - \underbrace{\cos\pi}_{-1}\sin\theta]$
$= 1-\sin\theta = r$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ simetri eksenidir. İnceleme aralığı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\theta \to \pi + \theta \Rightarrow r = 1 - \sin(\pi + \theta)$

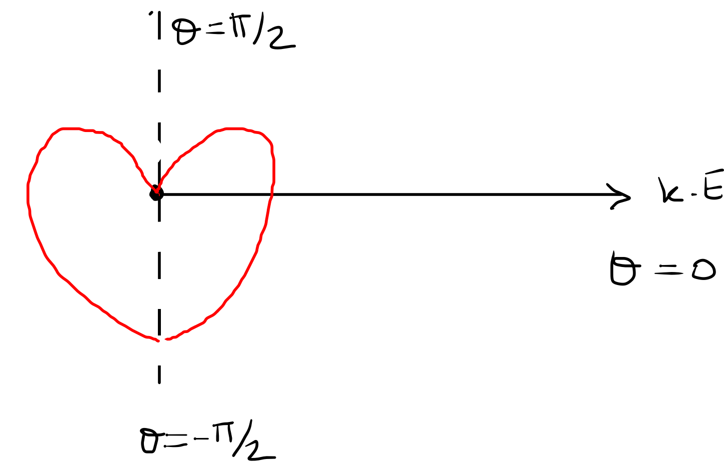
$= 1 - [\cancel{\sin\pi \cos\theta}^{\,0} + \cos\pi \sin\theta]$

$= 1 + \sin\theta$

$\neq r$

$\neq -r$

θ	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
r'		$-$		$-$	
r	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0



$r' = -\cos\theta < 0 \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$r = 0 \Rightarrow 1 - \sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = 0 \Rightarrow r = 1$

$r = 1 - \sin\theta$

$r' = -\cos\theta$

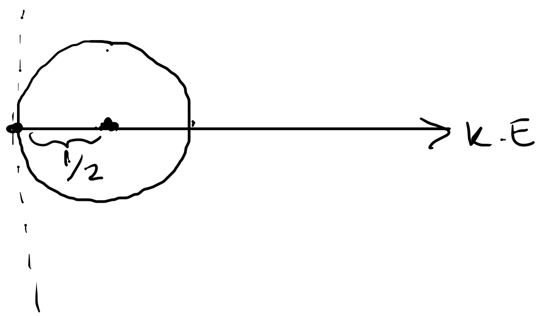
$$s = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{(-\cos\theta)^2 + (1-\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\theta + 1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2(1-\sin\theta)}\, d\theta = 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin\theta}\, d\theta \quad ?$$

$=$

Ör/ $r = \cos\theta$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

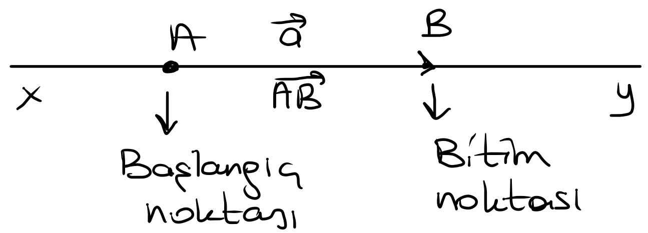


$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\theta + (-\sin\theta)^2}\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta$$

$$= \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \text{ br.}$$

VEKTÖRLER

Vektörler, bir büyüklük ve bir yöne sahip nicelikleri temsil etmek için kullanılır. Grafik olarak vektörler, yönlü doğru parçaları ile temsil edilirler. Doğru parçasının uzunluğu vektörün büyüklüğü ve doğru parçasının yönü vektörün yönüdür.



Yönlendirilmiş doğru parçasına vektör denir.

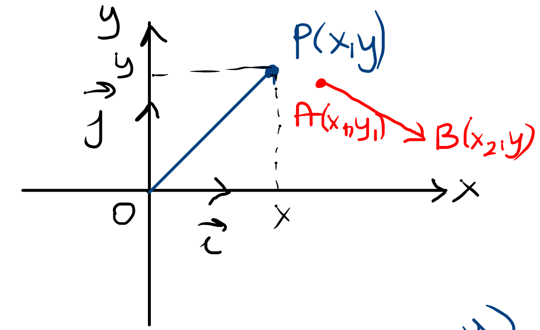
Vektörün doğrultusu, yönü ve uzunluğu vardır.

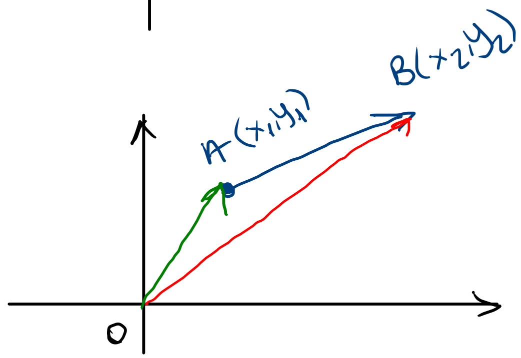
xy doğrultusunda

A dan B'ye yönü

$|\overrightarrow{AB}| \rightarrow$ vektörün uzunluğu (modülü)

Düzlem $\mathbb{R}^2$





$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (P noktasının yer vektörü)

$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j}$

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

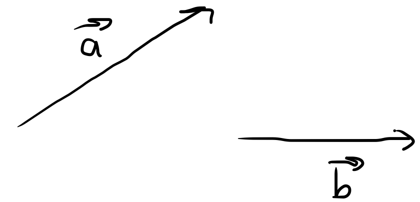
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

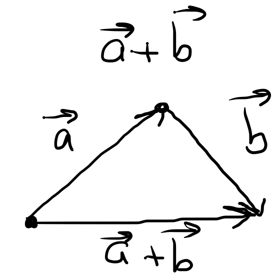
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j}$$

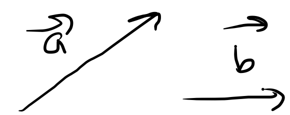
vektörlerin toplamı - farkı

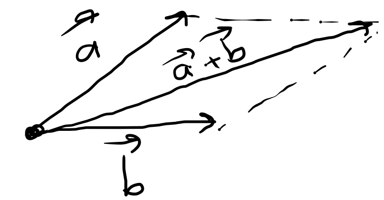
1°) Üçgen kuralı



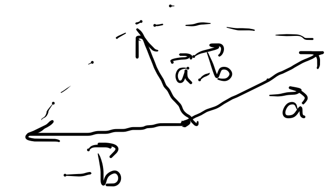


2°) Paralel kenar kuralı

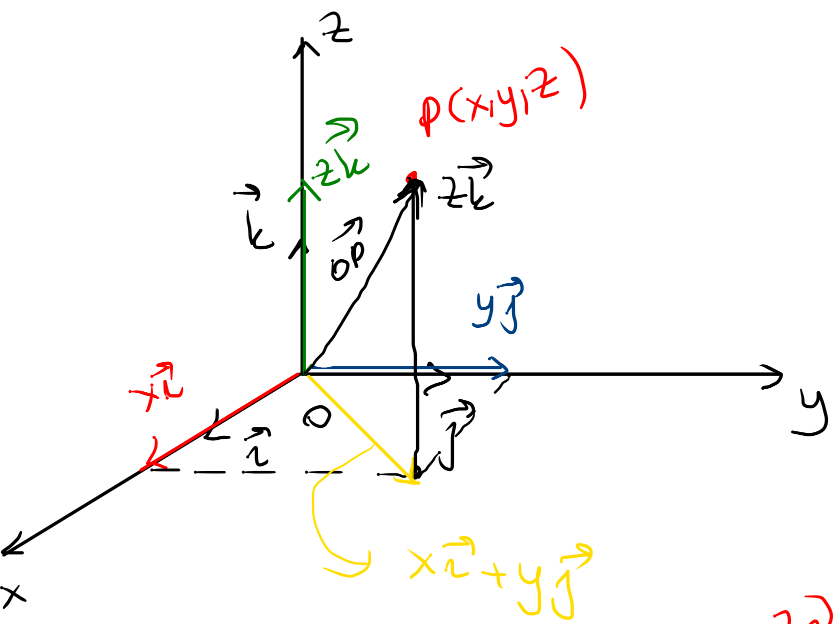




$(-1)\,\vec{b} = -\vec{b}$ Ters yöndeki vektörü gösterir.

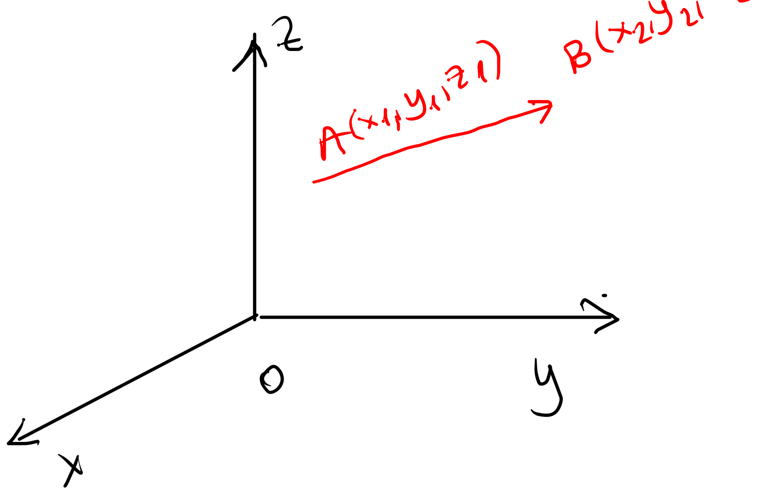


Uzay $\mathbb{R}^3$



$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{(P 'noktasının yer vektörü)}$$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



$$\vec{AB} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$\mathbb{R}^n$'de

Baz vektörleri $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ olmak üzere bir $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasının yer vektörü
$\vec{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ şeklindedir ve uzunluğu $|\vec{OP}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Teorem:
Eğer $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ve $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ iki vektör ve λ bir sayı ise

i) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_i = b_i$ olmasıdır. $(i = 1, 2, 3)$

ii) $\vec{a} \mp \vec{b} = (a_1 \mp b_1)\vec{i} + (a_2 \mp b_2)\vec{j} + (a_3 \mp b_3)\vec{k}$

iii) $\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j} + \lambda a_3\vec{k}$ → $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

$\lambda > 0 \Rightarrow \vec{a}$ ile aynı yönde bir vektör.
$\lambda < 0 \Rightarrow \vec{a}$ ile ters yönde bir vektör.

$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
Farklı gösterim şekilleri

Tanım: Uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir.

Teorem: Eğer $\vec{a}$, sıfırdan farklı bir vektör ise

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

vektörü $\vec{a}$ ile aynı yöne sahip uzunluğu 1 olan bir birim vektördür.

- $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ → üçgen eşitsizliği

Ör/ $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ vektörü ile aynı yöne sahip bir birim vektör bulunuz.

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

- Bir θ açısıyla bir u birim vektörü

$$\underline{\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}}$$

olarak alınabilir.

Ör/ Pozitif x-ekseni ile $\vec{a} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ vektörü arasındaki açıyı bulunuz.

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}}{2} = \underline{\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Skaler Çarpım (Nokta Çarpım)

Herhangi iki vektör verildiğinde bunların skaler (nokta) çarpımı bu vektörlerin karşılıklı bileşenlerinin çarpımının toplamı olarak tanımlanır.

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \longrightarrow \text{sonuç daima bir sayıdır.}$$

Teorem: Eğer θ açısı $[0,\pi]$ aralığında değişmek üzere $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin yönleri arasındaki açı ise o zaman;

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta$$

şeklindedir.

Özellikleri $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ herhangi üç vektör ve $t \in \mathbb{R}$ olsun.

1°) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2°) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

3°) $t\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (t\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(t\vec{b})$

4°) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ (Vektörlerin diklik koşulu)

5°) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

6°) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|$ (Cauchy-Schwartz eşitsizliği)

Ör/ $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ $\}$ bu vektörler arasındaki açıyı bulunuz.

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow 6 - 2 + 2 = 3 \cdot \sqrt{14} \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

Vektörel Çarpım