İspat: Fonksiyonun (a,b,c) noktasında ikinci mertebeden türevler dahil olmak üzere Taylor formülünü yazalım.

$$f(a+h_1, b+h_2, c+h_3) = f(a,b,c) + \underbrace{\left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y} + h_3\frac{\partial}{\partial z}\right) f(a,b,c)}_{=0} + \frac{1}{2!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y} + h_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f(a,b,c) + R_2$$

$$\underbrace{f(a+h_1, b+h_2, c+h_3) - f(a,b,c)}_{\Delta f} = \frac{1}{2!}\left[h_1^2\frac{\partial^2 f(a,b,c)}{\partial x^2} + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f(a,b,c)}{\partial y\partial x} + 2h_1h_3\frac{\partial^2 f(a,b,c)}{\partial z\partial x} + h_2^2\frac{\partial^2 f(a,b,c)}{\partial y^2} + h_2h_3\frac{\partial^2 f(a,b,c)}{\partial z\partial y} + h_3^2\frac{\partial^2 f(a,b,c)}{\partial z^2}\right] + R_2$$

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y} + h_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(3)} f(a+\theta h_1, b+\theta h_2, c+\theta h_3) \qquad (0<\theta<1)$$

kalan teriminde h_1, h_2, h_3 öyle seçilebilir ki (a,b,c) noktasının bu civarında R_2 kalan teriminin değeri bir önceki parantez içindeki terimlerin toplamından daha küçük kalır. O halde sadece sağ taraftaki parantezin işaretini incelemek yeterli olacaktır.

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_3}$ olarak gözönüne alırsak;

$$F(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} f''_{x_ix_j}(a,b,c)\cdot h_i h_j$$

şeklinde üç değişkenli bir kuadratik form elde edilir. O halde bu kuadratik formun ya negatif tanımlı veya pozitif tanımlı olduğunu söyleyebiliriz. ■

Ör/ $f(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2-xy-yz+2x$ fonksiyonunun maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y+2=0 \longrightarrow 2x-6z=-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y-x-z=0 \longrightarrow \underline{2/\ 11z-x=0}$$

$$16z=-2 \Rightarrow z=\frac{-1}{8} \Rightarrow y=\frac{-6}{8} \quad x=\frac{-11}{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=6z-y=0 \Rightarrow y=6z$$

$A\left(\frac{-11}{8},\frac{-3}{4},\frac{-1}{8}\right)$ kritik nokta.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=-1$$

f''_{xx} 1. adım.

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} \quad \text{2. adım.}$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{3. adım.}$$

- $f''_{xx} = 2 > 0$

- $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

- $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$

$= 18 - 2 = 16 > 0$

pozitif tanımlı olduğundan f (a,b,c) noktasında bir minimum değere sahiptir.

Bağlı maksimum, minimum ve Lagrange Çarpanları

Maksimum ve minimumunu aradığımız fonksiyonda değişkenler birbirine bazı bağıntılar ile bağlı iseler, bu şekildeki probleme bağlı maksimum-minimum problemi denir. Bu problemler verdiğimiz teoremler ile çözülebileceği gibi bazen ekstremum noktalarını bulmak zor olabilir. Bunun için Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak ekstremum noktalar bulunabilir.

1) İki değişkenli fonksiyonda bir bağıntı bulunması hali

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun değişkenleri arasında $g(x,y)=0$ şeklinde bir bağıntı bulunması halinde ekstremum noktalarını arayalım;

$f(x,y)$ ve $g(x,y)$ fonksiyonları ve bunların birinci mertebeden kısmi türevleri bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. Ayrıca

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2>0$$

olsun. Bu koşuldan g_x' ve g_y' türevlerinin her ikisinin birden sıfır olmayacağı kesindir. Farzedelim ki $g_y'\neq 0$ olsun. Bu taktirde kapalı fonksiyon teoremine göre $g(x,y)=0$ denkleminin $y=h(x)$ şeklinde çözümü vardır. Bu fonksiyon $f(x,y)$ de yerine yazılırsa;

$$z = f(x, h(x)) = F(x)$$

olur. Böylece iki değişkenli fonksiyonun maksimum-minimum problemi tek değişkenli fonksiyonun maksimum-minimum problemine indirgenir.

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$ denklemini sağlayan x noktaları fonksiyonun ekstremum noktalarını verir.

$g(x,y)=0$ dan $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{g'_x}{g'_y}$ 'dir.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{g'_x}{g'_y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{g'_y\cdot f'_x - f'_y\cdot g'_x}{g'_y} = 0 \qquad (g'_y \neq 0)$$

$$g'_y f'_x - f'_y\cdot g'_x = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{D(f,g)}{D(x,y)} = 0 \text{ olur.}$$

O halde $z=f(x,y)$ fonksiyonunun $g(x,y)=0$ koşulu altındaki ekstremum noktaları $g(x,y)=0$, $\dfrac{D(f,g)}{D(x,y)}=0$ denklem sisteminin çözümüyle bulunur.

Aynı sonucu daha kısa şekilde şöyle bulabiliriz;

$$H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$ (λ bir parametre)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= g(x,y) = 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözümüyle ekstremum noktaları bulunur.

Bu yönteme Lagrange çarpanları yöntemi denir.

Örn/ Çevresi 8 m olan maksimum alanlı bir dikdörtgen bulunuz.

$f(x,y) = xy \qquad g(x,y) = 2(x+y) = 8 \Rightarrow g(x,y) = 2x + 2y - 8$

$$H(x,y,\lambda) = xy + \lambda(2x+2y-8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y + 2\lambda = 0 \Rightarrow y = -2\lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \Rightarrow x = -2\lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 2x+2y-8 = 0 \Rightarrow -4\lambda - 4\lambda - 8 = 0 \Rightarrow -8\lambda = 8$$

$$\lambda = -1$$

$x = 2$

$y = 2$

xy

$x + y = 4$

$y = 4 - x$

$f(x) = x.(4-x)$

$= 4x - x^2$

$f'(x) = 4 - 2x \qquad f'' = -2 < 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$