Diferansiyel Denklemler

Mail adreslerim: sbcalis15@gmail.com
skizilb@yildiz.edu.tr
E-2043

Tanım: $y=f(x)$ fonksiyonu, x bağımsız değişkeni ve fonksiyonun sınırlı sayıda türevleri arasında kurulmuş olan bağıntıya adi dif. denklem ya da kısaca dif. denklem denir.

$$F(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n)})=0$$

veya

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

veya

$$\frac{d}{dx}=D \Rightarrow F(x,y,Dy,D^2y,\dots,D^ny)=0$$

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=f(x) \longrightarrow \text{n. mertebeden bir dif. denk.}$$

Mertebe: Dif denklemin mertebesi denklemdeki en yüksek türev mertebesidir.

Derece: Denklemdeki en yüksek mertebeli türevin derecesi denklemin derecesidir. Derece, denklem rasyonel haldeyken belirlenir.

$xy'+2y=e^x$; 1. mertebeden, 1. dereceden

$y''^3+2xy'^2=e^{2x}$; 2. mertebeden, 3. dereceden

$y''=\sqrt{1+y'^2} \Rightarrow y''^2=1+y'^2$; 2. mertebeden, 2. dereceden

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Diferansiyel denklemler çeşitli amaçlarla sınıflandırılırlar. Başlangıçta verdiğimiz tanım dar anlamda ve bütün diferansiyel denklem türlerini ifade edecek yeterlikte değildir. Bu nedenle bu tanıma dif. denklemi daha iyi ifade edebilmek için yeni bilgiler eklemek gerekir.

1°) Diferansiyel denklemler şekillerine göre ikiye ayrılırlar

$d \rightarrow$ adi türev

$\partial \rightarrow$ kısmi türev

- Adi dif. denklemler

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0 \qquad (y=f(x)) \qquad \text{(tek değişken)}$$

Dif. denklemde bulunan türevler, bir ya da daha çok bağlı değişkenin tek bir serbest değişkene göre adi türevi ise diferansiyel denkleme adi dif. denklem denir.

Ör/ $y''+5y'+6y=\sin x$

- Kısmi türevli dif. denklemler

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dots\right)=0 \qquad (z=f(x,y)) \qquad \text{(iki değişken)}$$

Bir ya da daha çok bağlı değişkenin iki ya da daha fazla serbest değişkene göre kısmi türevlerini bulunduran denklemlerdir.

Ör/ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (Laplace dif. denk)

2) Diferansiyel denklemler mertebelerine göre ikiye ayrılırlar

- Birinci mertebeden dif. denklemler

$ay' + by + c = f(x)$ gibi sadece 1. mertebeden türevi içeren denklemlerdir.

Başlı başına bir sınıf oluştururlar.

1) Değişkenlerine ayrılabilir dif. denk.

2) Homojen dif. denk

3) Değişkenlerine ayrılabilir hale getirilebilen dif. denk.

4) Homojen hale getirilebilen dif. denk.

5) Tam dif. denk.

6) Tam Hale getirilebilen dif. denk.

7) Lineer dif. denk

8) Lineer Hale getirilebilen dif. denk. → Bernoulli dif. denk. / → Ricatti dif. denk.

9) Clairaut dif. denk.

10) Lagrange dif. denk.

- Yüksek mertebeden dif. denklemler

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)=f(x) \qquad f(x)\equiv 0,\quad f(x)\not\equiv 0$$

gibi denklemlerdir. Mertebesi iki ya da daha büyük olan denklemlerdir.

- 1 mert. ör/ $\frac{dy}{dx}=x-8$
- Yüksek mert. ör/ $y''+7y'=3x$

3) Dif. denklemler derecelerine göre de ikiye ayrılırlar

- Lineer dif. denk: Fonksiyonun ve bütün türevlerinin 1. dereceden olduğu denklemlere Lineer dif. denklemler denir.

- Non-Lineer dif. denk: Fonksiyonun ve bütün türevlerinin 1. dereceden olmadığı denklemlere denir.

ör/ $y''+5y'+3y=x^3 \to$ Lineer

$y''+y'^2=x \to$ Non-Lineer

4) Dif. denklemler katsayılarına göre ikiye ayrılırlar

Katsayılarının değişken ya da sabit olmasına göre iki kısımda incelenirler.

- Sabit katsayılı dif. denklemler

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad a_i \quad (i=0,\ldots,n) \rightarrow \text{sbt.}$$

Ör/ $5y''' + 6y'' + y' + 2y = 3x+2$

- Değişken katsayılı dif. denklemler

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x) \qquad a_i(x) \quad (i=0,\ldots,n) \rightarrow x \text{ bağımsız değişkeninin birer fonksiyonu}$$

Ör/ $xy' + y'^2 = \sin x$

$x^2 y'' + 2xy' + y = e^x$

Diferansiyel Denklemlerin Oluşması

Bir diferansiyel denklem ya bir matematik tanım sonucu ya bir doğa olayı gereği ya da bir bilgi birikiminin matematiksel modeli olarak ortaya çıkar.

$y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x) = \varphi(x)$ (fi) $A(x)$

$\Rightarrow y'' = f''(x) = \varphi'(x) = \psi(x)$ (psi) $B(x)$

y ve türevleri arasında ilişki kurarak dif. denklemler oluşturulur.

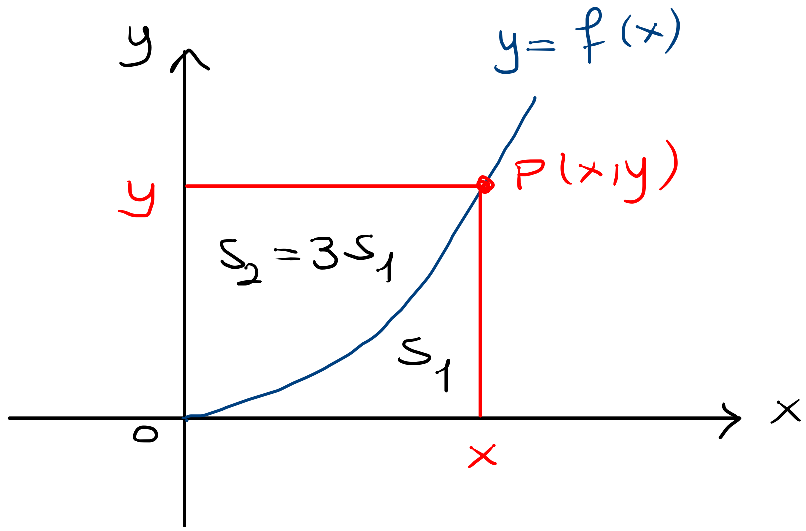
Ör/

- $y = x\sin x$
- $y' = \sin x + x\cos x$

$\left.\begin{aligned} xy' &= x\sin x + x^2\cos x \\ y &= x\sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{xy' - y = x^2\cos x}$ ✓

- $y'' = 2\cos x - x\sin x \rightarrow \boxed{y'' + y = 2\cos x}$ ✓

Ör/ Başlangıçtan geçen bir eğrinin herhangi bir P(x,y) noktasından eksenlere paraleller çizerek bir dikdörtgen alan oluşturulmaktadır. Eğri o şekilde seçilmelidir ki dikdörtgenden ayırdığı alan parçalarından biri diğerinin üç katına eşit olsun. Bu eğrinin dif. denklemini oluşturalım.



$$S = x.y = S_1 + S_2 = 4S_1$$

$$x.y = 4\int_0^x f(t)\,dt$$

$$\frac{d}{dx}[x.y] = \frac{d}{dx}\left\{4\int_0^x f(t)\,dt\right\}$$

$$y + xy' = 4f(x) = 4y$$

$$\Rightarrow \boxed{xy' - 3y = 0}$$ Eğrinin dif. denklemi.

Bir Eğri Ailesinin Diferansiyel Denklemi